Chapitre 1 - Numération

1 Trois bases usuelles

1.1 Système décimal - base 10

Le système de numération décimal moderne utilise 10 symboles, qui sont les 10 chiffres : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9. Suivant sa position dans le nombre, le chiffre x peut valoir, $x \times 10^0$ (si il est complètement à droite), $x \times 10^1$ (si c'est le deuxième en partant de la droite), $x \times 10^2$, etc...

Exemple. $578367 = 5 \times 10^5 + 7 \times 10^4 + 8 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 6 \times 10^1 + 7 \times 10^0$.

Système décimal

On considère
- un entier n supérieur ou égal à 1,
- pour tout entier k entre 1 et n, un symboles a_k représentant un chiffre pris dans l'ensemble $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

Si un nombre entier s'écrit en décimal $a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_2 a_1 a_0$, alors ce nombre représente la quantité :

$$a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \cdots + a_1 \times 10^1 + a_0 \times 10^0 .$$

Remarque. Les chiffres dont le poids est le plus important sont à gauche dans l'écriture du nombre. Ainsi, si l'on veut obtenir une bonne approximation d'un nombre, il suffit de ne conserver que les chiffres les plus à gauche, et de remplacer les autres par des 0.

Remarquons que dans les calculs, on aligne les chiffres à partir de la droite pour pouvoir tenir compte des *poids* associés aux différentes positions.

Exemple.
Addition :

$$\begin{array}{cccccc} & & 3 & 5 & 2 & 1 \\ + & & 8 & 2 & 4 & 9 \\ + & & & 7 & 6 & 0 \\ \hline & 1 & 2 & 5 & 3 & 0 \end{array}$$

Exemples.

- La décomposition en puissance de 10 de 100000_{10} est : ....
- La décomposition en puissance de 10 de 12345_{10} est : ....

1.2 Système binaire - base 2

Le système binaire ou base 2 n'utilise que deux chiffres, deux symboles : 0 et 1. Ce système sert en particulier en électronique et en informatique, puisque l'électronique numérique ne sait représenter que deux valeurs (correspondant à deux plages de tension). Suivant sa position (à partir de la droite), au chiffre 1 correspondra la valeur : 2^0, 2^1, 2^2, ...
La base 2 est la plus petite base envisageable. Un chiffre binaire est appelé «bit» en informatique, ce qui est la contraction de «binary digit», autrement dit «chiffre binaire» en anglais.

Système binaire

On considère
- un entier n supérieur ou égal à 1,
- pour tout entier k entre 1 et n, un symboles a_k représentant un chiffre pris dans l'ensemble $\{0, 1\}$

Si un nombre entier s'écrit en binaire $a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_2 a_1 a_0$, alors ce nombre représente la quantité :

$$a_n \times 2^n + a_{n-1} \times 2^{n-1} + \cdots + a_1 \times 2^1 + a_0 \times 2^0 \ .$$

Proposition : Représentation des premiers entiers en binaire

En base 10	En binaire	En base 10	En binaire
0	0	8	1000
1	1	9	1001
2	10	10	1010
3	11	11	1011
4	100	12	1100
5	101	13	1101
6	110	14	1110
7	111	15	1111

Exemples.
Donnons l'écriture décimale des nombres binaires ci-dessous :

- $11011001111_2 =$ ....
- $101010_2 =$ ....
- $100000_2 =$ ....
- $1000110_2 =$ ....

1.3 Système hexadécimal - base 16

Le système hexadécimal est l'écriture dans la base 16. Les chiffres de la base 16 s'obtiennent en complétant 0, 1, ...9 avec les premières lettres de l'alphabet. Ainsi les symboles utilisés comme chiffres pour la base 16 sont :
0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, et F.

Système hexadécimal

On considère
- un entier n supérieur ou égal à 1,
- pour tout entier k entre 1 et n, un symboles a_k représentant un chiffre pris dans l'ensemble $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F\}$

Si un nombre entier s'écrit en hexadécimal $a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_2 a_1 a_0$, alors ce nombre représente la quantité :

$$a_n \times 16^n + a_{n-1} \times 16^{n-1} + \cdots + a_1 \times 16^1 + a_0 \times 16^0 .$$

Proposition : Représentation des premiers entiers en hexadécimal :

En base 10	En hexadécimal	En base 10	En hexadécimal
0	0	11	B
1	1	12	C
2	2	13	D
3	3	14	E
4	4	15	F
5	5	16	10
6	6	17	11
7	7	18	12
8	8	19	13
9	9	20	14
10	A	21	15

Exemples.
Donnons l'écriture décimale des nombres hexadécimaux ci-dessous :
- $A1_{16} =$ ....
- $BF_{16} =$ ....
- $4000_{\text{hexa}} =$ ....
- $5C_{b16} =$ ....

2 Changements de base

2.1 De la base 2 à la base 10

Proposition

Quelques puissances de 2 (à connaître) sont :

2^{-3}	2^{-2}	2^{-1}	2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9	2^{10}	...
0,125	0,25	0,5	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	...

De base 2 à base 10 : méthode 1

On peut convertir un nombre binaire en décimal en additionnant les puissances de 2 associées à chaque 1.

Exemple. Par exemple pour convertir le nombre binaire $N = 1101100111101_{b2}$, on écrit :

Bits de N	1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	0	1
Puissance de 2	2^{12}	2^{11}	2^{10}	2^9	2^8	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
Valeur en base 10	4096	2048	1024	512	256	128	64	32	16	8	4	2	1

Autrement dit, l'écriture en base 10 de N est :

$$\begin{aligned} 2^{12} + 2^{11} + 2^9 + 2^8 + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^0 &= 4096 + 2048 + 512 + 256 + 32 + 16 + 8 + 4 + 1 \\ &= 6973_{10} \end{aligned}$$

Exemples.

- $101010,01_2 =$ ....
- $110,101_2 =$ ....

De base 2 à base 10 : méthode 2 (schéma de Hörner - entiers uniquement)

On part du chiffre le plus à gauche, puis on répète jusqu'à atteindre la fin du nombre :
- multiplier par 2 le résultat,
- ajouter le chiffre suivant.

Exemple.
$10110_2 =$ ....

2.2 De la base 10 à la base 2

De base 10 à base 2 : méthode 1 (par divisions successives)

- Pour décomposer la partie entière d'un nombre, on effectue des divisions euclidiennes par 2 successives :
  - on effectue la division euclidienne du nombre à convertir,
  - puis à chaque étape, on effectue la division du quotient de l'étape précédente par 2.

  À la fin, on lit le nombre binaire sur les restes des divisions, en partant de la fin.
- Pour convertir la partie fractionnaire d'un nombre, on fait des multiplications par 2 : à chaque étape, la partie entière du résultat constitue le chiffre suivant du nombre binaire, et on multiplie par deux la partie fractionnaire de ce même résultat.

Exemples.

- Convertissons le nombre décimal 6_{10} en un nombre binaire :

- Convertissons le nombre décimal 221 en un nombre binaire : :

- Convertissons le nombre décimal $36,5625$ en un nombre binaire :

Remarque. Attention à ne pas se tromper de sens de lecture !

De base 10 à base 2 : méthode 2 (par plus grande puissance)
On réalise une décomposition en puissances de 2 d'un nombre décimal en retirant à chaque étape la plus grande puissance de 2 inférieure au nombre.

Remarque. Attention, une justification de la décomposition est attendue.

Exemple.
Pour convertir le nombre décimal 93,625 en base 2, on va chercher les puissances de 2 entrant dans ce nombre :

— La plus grande puissance de 2 inférieure ou égale à 93,625 est $2^6 = 64$.
De plus : $93 - 64 = 29,625$.

— La plus grande puissance de 2 inférieure ou égale à 29,625 est $2^4 = 16$.
De plus : $29 - 16 = 13,625$.

— La plus grande puissance de 2 inférieure ou égale à 13,625 est $2^3 = 8$.
De plus : $13 - 8 = 5,625$.

— La plus grande puissance de 2 inférieure ou égale à 5,625 est $2^2 = 4$.
De plus : $5,625 - 4 = 1,625$.

— La plus grande puissance de 2 inférieure ou égale à 1,625 est $2^0 = 1$.
De plus : $1,625 - 1 = 0,625$.

— La plus grande puissance de 2 inférieure ou égale à 0,625 est $2^{-1} = 0,5$.
De plus : $0,625 - 0,5 = 0,125 = 2^{-3}$.

Ainsi :

$$93,625 = 2^6 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^0 + 2^{-1} + 2^{-3}$$

Le nombre décimal 93,625 s'écrit donc en binaire sous la forme : $1011101,101_2$.

2.3 Entre la base 16 et la base 2

Tableau de conversion entre base 2 et base 16

Chaque chiffre hexadécimal correspond à un bloc de quatre chiffres binaires.

- Pour convertir un nombre hexadécimal en un nombre binaire, on remplace chaque chiffre hexadécimal par son équivalent de 4 chiffres binaires.
- Réciproquement, pour passer du binaire à l'hexadécimal, on découpe le nombre en tranches de 4 chiffres à partir de la virgule (ou de la droite pour les entiers) et on remplace chaque bloc par le chiffre hexadécimal correspondant.

Base 10	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Base 16	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A
Base 2	0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111	1000	1001	1010

Base 10	11	12	13	14	15
Base 16	B	C	D	E	F
Base 2	1011	1100	1101	1110	1111

Exemples.

- $9AB5,2_{16} =$ ....
- $111\ 0101\ 1110\ 0010\ 0100,10_2 =$ ....

2.4 De la base 16 à la base 10

De base 16 à base 10 : méthode

On peut convertir un nombre hexadécimal en décimal en additionnant les chiffres multipliés par leur poids (puissance de 16 associée).

Exemples.
Convertissons les nombres hexadécimaux ci-dessous en des nombres décimax :

- $A9B5_{16} =$ ....
- $2,3_{16} =$ ....

2.5 De la base 10 à la base 16

De base 10 à base 16 : méthode

- Pour décomposer la partie entière d'un nombre, on effectue des divisions euclidiennes par 16 successives :
  — on effectue la division euclidienne du nombre à convertir,
  — puis à chaque étape, on effectue la division du quotient de l'étape précédente par 16.

  À la fin, on lit le nombre hexadécimal sur les restes des divisions, en partant de la fin. Attention à convertir chaque reste en un unique chiffre hexadécimal.
- Pour convertir la partie fractionnaire d'un nombre, on fait des multiplications par 16 : à chaque étape, la partie entière du résultat constitue le chiffre suivant du nombre hexadécimal, et on multiplie par 16 la partie fractionnaire de ce même résultat.

Exemple.
Convertissons en hexadécimal le nombre décimal 43509.

Remarque. Les nombres négatifs, quelle que soit la base dans laquelle ils sont exprimés, s'écrivent avec un symbole moins (que l'on note -) devant.

3 Notion d'arrondi et de précision

Exemple.
Convertissons en binaire le nombre décimal $0,1_{10}$:

Remarque. Tout nombre décimal n'a pas nécessairement une écriture finie en binaire. Il est donc important de se pencher sur les notions d'arrondi et de précision.

Considérons le nombre 23,45825. Il existe plusieurs façon de l'arrondir :
- arrondi à l'entier près : 23,
- arrondi (au plus proche) à 10^{-2} près : 23,46,
- arrondi par défaut à 10^{-2} près : 23,45,
- arrondi par excès à 10^{-3} près : 23,459,
- arrondi avec une précision de 3 chiffres significatifs : 23,5.

On peut aussi arrondir des nombres écrits dans d'autres bases :
- $1001,0111_2$ arrondi à l'entier près vaut 1001_2.
- $11,11111_2$ arrondi avec une précision de 3 chiffres significatifs vaut $11,1_2$.
- $1001,10111_2$ arrondi avec une précision de 3 chiffres significatifs vaut 1010.
- $A134B,C5_{16}$ arrondi à l'entier près vaut $A134C_{16}$.
- $A134B,C5_{16}$ arrondi avec une précision de 3 chiffres significatifs vaut $A1300_{16}$.

Définition

On appelle partie entière d'un nombre x le plus grand entier inférieur ou égal à ce nombre. On la note $E(x)$.

Exemple.

- La partie entière de $2,5878$ vaut $E(2,5878) =$ ....
- La partie entière de $1/3$ vaut $E(1/3) =$ ....
- La partie entière de $-1,3$ vaut $E(-1,3) =$ ....

4 Opérations sur les entiers naturels

4.1 Addition binaire

Méthode

Pour additionner deux entiers écrits en binaire, il suffit de savoir que :
- $0 + 0 = 0$,
- $0 + 1 = 1 + 0 = 1$,
- $1 + 1 = 10$,
- $1 + 1 + 1 = 11$.

Pour effectuer l'addition binaire, on procède comme pour une addition décimale, en utilisant les égalités précédentes, et en tenant compte des éventuelles retenues.

Exemples.

$$\begin{array}{cccccccc} & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ + & & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} & 1^1 & 1^1 & 0^1 & 1^1 & 1 \\ + & & 1 & 1 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Remarque. On peut vérifier les résultats des additions binaires en repassant en décimal.

Remarque. Pour calculer à la main des additions de nombres hexadécimaux, on peut convertir les nombres en binaires, puis faire l'addition, puis reconvertir le résultat en hexadécimal.

4.2 Multiplication binaire par une puissance de 2

Proposition

Soit n un entier naturel. Multiplier un entier binaire par 2^n revient à ajouter n zéros à droite du nombre.

Exemple.
$1011_2 \times 2^4 = 1011_2 \times 10000_2 =$ ....

4.3 Division binaire par une puissance de 2

Proposition

Soit n un entier naturel. Lorsqu'on réalise la division euclidienne d'un entier binaire par 2^n, on obtient :

- un reste formé de n chiffres les plus à droite du nombre,
- un quotient formé par les chiffres restants.

Exemple.
Écrivons la division euclidienne de 1011001_2 par 2^3 : ....

5 Exercices

Exercice 1.
Donner la valeur en base 10 des nombres binaires suivants :

1) 110011_2 2) 11111_2 3) 1010101_2

Exercice 2.
Donner la valeur en base 10 des nombres hexadécimaux suivants :

1) $1A_{16}$ 2) 123_{16} 3) $C4_{16}$

Exercice 3.

1) Donner la forme binaire puis décimale du plus grand nombre qu'on puisse écrire avec 4 bits.
2) Même question avec 8 bits (c'est-à-dire un octet).
3) Une adresse IPV4 (Internet Protocol Version 4) est constituée de 4 nombres, chacun compris entre 0 et 255. Par exemple : 222.019.045.237.
   a) Sur combien de bits est codée une adresse IP ?
   b) Sur combien d'octets ?
   c) Combien d'adresses IP peut-on coder avec cette norme ?
   d) Avec la norme IPV6 (version 6 de l'Internet Protocol), on utilise 16 nombres compris entre 0 et 255. Combien d'adresses IP environ peut-on construire avec cette norme ? (On peut s'aider du fait que $10^3 \approx 2^{10}$)

Exercice 4.

1) Convertir en décimal les nombres binaires suivants :

a) 10011_2 b) $11101,011_2$ c) $10010,1_2$

2) Convertir en binaire les nombres décimaux suivants :

a) 5_{10} b) 30_{10} c) $87,75_{10}$

Exercice 5.

1) Convertir en hexadécimal les nombres binaires suivants :

a) 10011_2 b) $1101010,111_2$ c) $100001111,01_2$

2) Convertir en binaire les nombres hexadécimaux suivants :

a) $3DA4B_{16}$ b) $9C,2_{16}$ c) $14F,E_{16}$

Exercice 6.

1) Convertir en décimal les nombres hexadécimaux suivants :

a) $1FD37_{16}$ b) $42,3_{16}$ c) $55B1,A_{16}$

2) Convertir en hexadécimal les nombres décimaux suivants :

a) 42_{10} b) 2014_{10} c) 3760_{10}

Exercice 7.
Dans un logiciel comme Gimp ou Photoshop, les couleurs sont codées par 3 nombres hexadécimaux à deux chiffres représentant les valeurs de Rouge, Vert et Bleu (codage RVB). Ainsi $FF\,FF\,FF$ représente le blanc et $00\,00\,00$ représente le noir.

1) Combien de couleurs différentes peut on représenter dans ce mode ?
2) Combien de bits utilise ce codage ?

Exercice 8.
Effectuer les additions binaires :

a) $101 + 11$,
b) $11111 + 1010$
c) $10011 + 11011$
d) $1111 + 1111$

Exercice 9.
Donner la division euclidienne en binaire :

1) De 100101101_2 par 2^5
2) De 1110001_2 par 2^3
3) De 110_2 par 2^4

Le mot de la fin : Il y a 10 catégories de personnes : la catégorie de ceux qui comprennent le binaire, et la catégorie de ceux qui ne le comprennent pas.