Chapitre 3 - Calcul booléen

Partie 1 : calcul des propositions

1 Propositions, valeurs de vérité

Définition

Une proposition est un énoncé dont on peut dire avec certitude si il est vrai ou faux.

Exemples :

- $2 + 7 = 9$ est une proposition.
- "La ville de Cachan est dans le Val de Marne." est une proposition.
- "Il pleuvra demain." n'est pas une proposition.

Remarque :
Les propositions sont utilisées dans les structures conditionnelles et dans les boucles "Tant Que". Par exemple en Python :

- "$2 * 3 == 0$" est une proposition fausse,
- "$2 < 3$" est une proposition vraie.

Définition

Toute proposition est soit vraie, soit fausse. Cette convention fondamentale permet d'associer à chaque proposition sa valeur de vérité.

- La valeur de vérité d'une proposition vraie est notée V, 1, ou True.
- La valeur de vérité d'une proposition fausse est notée F, 0, ou False.

2 Connecteurs logiques

Les connecteurs logiques permettent de construire de nouvelles propositions à partir d'un certain nombre de propositions initiales. On décrit de telles constructions à l'aide de tables de vérités, qui donnent, en fonction des valeurs de vérités des propositions initiales, la valeur de vérité de la construction.

Définition

On appelle tautologie une proposition toujours vraie quelque soit la valeur de vérité des propositions initiales qui la composent.

2.1 Négation

Définition

La négation d'une proposition P, notée $\overline{P}$ ou $\neg P$, est la proposition dont la table de vérité est :

P	$\neg P$
0	....
1	....

Autrement dit $\neg P$ est vraie si P est fausse et réciproquement.

Exemple : Si P est la proposition "Il pleut", $\neg P$ est la proposition ....

Remarque : En Python, la négation s'exprime avec l'opérateur "not".

Proposition

$\neg(\neg P)$ et P ont la même valeur de vérité.

2.2 Conjonction

Définition

La conjonction de deux propositions P et Q, notée $P \wedge Q$, est la proposition qui n'est vraie que si P et Q sont vraies toutes les deux. La table de vérité de $P \wedge Q$ est donnée par :

P	Q	$P \wedge Q$
0	0	....
0	1	....
1	0	....
1	1	....

Remarque : En Python, la conjonction s'exprime avec l'opérateur "and".

Exemple : Si P est la proposition "Il pleut" et si Q est la proposition "Il fait moins de 12 degrés", $P \wedge Q$ est la proposition ....

2.3 Disjonction

Définition

La disjonction de deux propositions P et Q, notée $P \vee Q$ ou "P *ou* Q", est la proposition qui est vraie si au moins une des deux assertions P ou Q est vraie. La table de vérité de $P \vee Q$ est donnée par :

P	Q	$P \vee Q$
0	0	....
0	1	....
1	0	....
1	1	....

Remarques :

- En Python, la disjonction s'exprime avec l'opérateur "or".
- En français, le "ou" peut être inclusif (Entreprise cherche stagiaire parlant anglais ou espagnol), exclusif (Vous voulez une glace à la vanille ou au chocolat ?) ou avoir le sens d'une implication (Mange ta soupe ou tu n'auras pas de dessert).
  En logique, le "ou" est toujours **inclusif**.

2.4 Implication

Définition

La proposition "P implique Q", notée $P \Rightarrow Q$, est la proposition qui n'est fausse que si P est vraie et Q est fausse. La table de vérité de $P \Rightarrow Q$ est donnée par :

P	Q	$P \Rightarrow Q$
0	0	....
0	1	....
1	0	....
1	1	....

Exemples :

- Notons P la proposition "$1 = 2$" et Q la proposition "$4 > 10$".
  $P \Rightarrow Q$ est la proposition : .... , qui est une proposition vraie.
- "Si $1 = 2$ alors $4 < 10$" est une proposition ....
- "Si $4 < 10$ alors $1 = 2$" est une proposition ....

Proposition

$(P \wedge (P \Rightarrow Q)) \Rightarrow Q$ est une tautologie.

2.5 Équivalence

Définition

L'équivalence logique de deux propositions P et Q, notée $P \Leftrightarrow Q$ est la proposition qui n'est vraie que si P et Q sont vraies simultanément ou fausses simultanément. La table de vérité de $P \Leftrightarrow Q$ est donnée par :

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
0	0	....
0	1	....
1	0	....
1	1	....

Exemple : Soient n et a deux entiers.
"$a \equiv 0[n] \quad \Leftrightarrow \quad a$ est un multiple de n." est une proposition vraie.

Proposition

$(P \Leftrightarrow Q) \quad \Leftrightarrow \quad ((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P))$ est une tautologie.

3 Propriétés des connecteurs logiques

3.1 Complément

Proposition

$P \vee (\neg P)$ est toujours vraie, et $P \wedge (\neg P)$ est toujours fausse.

3.2 Commutativité

Proposition

L'ordre des éléments n'influence pas la valeur d'une conjonction ou d'une disjonction :

1) $P \wedge Q$ et $Q \wedge P$ ont la même valeur de vérité.
2) $P \vee Q$ et $Q \vee P$ ont la même valeur de vérité.

3.3 Associativité

Proposition

Si on a plusieurs conjonctions, ou plusieurs disjonction, l'ordre dans lequel on effectue les opérations n'a pas d'importance.

1) $(P \wedge Q) \wedge R \quad \Leftrightarrow \quad P \wedge (Q \wedge R)$.
2) $(P \vee Q) \vee R \quad \Leftrightarrow \quad P \vee (Q \vee R)$.

3.4 Distributivité

Si on indique : " Pour entrer dans le château, passez le pont-levis et prenez la porte de droite ou la porte de gauche.", il y a deux façons d'entrer dans le château : passer le pont-levis et prendre la porte de droite, ou bien passer le pont-levis et prendre la porte de gauche.

Proposition

Les opérations $\vee$ et $\wedge$ sont distributive l'une par rapport à l'autre :

1) $P \wedge (Q \vee R) \quad \Leftrightarrow \quad (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$.
2) $P \vee (Q \wedge R) \quad \Leftrightarrow \quad (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$.

3.5 Éléments neutres, éléments absorbants

Proposition

Soit V une proposition vraie, et F une proposition fausse. Alors, pour toute proposition P :

$$(P \wedge V) \Leftrightarrow .... , \quad (P \wedge F) \Leftrightarrow .... , \quad (P \vee V) \Leftrightarrow .... , \quad (P \vee F) \Leftrightarrow ....$$

On dit que :

- V est <u>l'élément neutre</u> du connecteur $\wedge$, et <u>l'élément absorbant</u> du connecteur $\vee$.
- F est <u>l'élément absorbant</u> du connecteur $\wedge$, et <u>l'élément neutre</u> du connecteur $\vee$.

3.6 Contraposée

Définition

$((\neg Q) \Rightarrow (\neg P))$ s'appelle la contraposée de $(P \Rightarrow Q)$.

Proposition

Toute implication est équivalente à sa contraposée :
$(P \Rightarrow Q) \quad \Leftrightarrow \quad ((\neg Q) \Rightarrow (\neg P))$ est une tautologie.

Exemple : Soit P la proposition "Il pleut" et Q la proposition "Je prends mon parapluie".

- $P \Rightarrow Q$ est la proposition ....
- $(\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$ est la proposition ....

Les deux sont équivalentes.

3.7 Loi de De Morgan

La négation de "il fait beau et chaud" n'est pas "il fait moche et froid" mais "il fait moche ou froid". Ceci est établi par les lois de De Morgan :

Propositions

- $(\neg(P \wedge Q)) \quad \Leftrightarrow \quad ((\neg P) \vee (\neg Q))$.
- $(\neg(P \vee Q)) \quad \Leftrightarrow \quad ((\neg P) \wedge (\neg Q))$.

4 Exercices

Exercice 1 :
Démontrer à l'aide d'une table de vérité que $\neg(\neg P)$ et P ont la même valeur de vérité.

Exercice 2 :
Démontrer à l'aide d'une table de vérité que $(P \wedge (P \Rightarrow Q)) \Rightarrow Q$ est une tautologie.

Exercice 3 :
Montrer que $(P \Rightarrow Q)$ et $(\neg P \vee Q)$ ont la même valeur de vérité.

Exercice 4 :
Démontrer à l'aide d'une table de vérité que $(P \Leftrightarrow Q) \quad \Leftrightarrow \quad ((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P))$ est une tautologie.

Exercice 5 :
Démontrer à l'aide d'une table de vérité que :

a) $P \wedge (Q \vee R) \quad \Leftrightarrow \quad (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$.

b) $P \vee (Q \wedge R) \quad \Leftrightarrow \quad (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$.

Exercice 6 :
Démontrer à l'aide d'une table de vérité que $(P \Rightarrow Q) \quad \Leftrightarrow \quad ((\neg Q) \Rightarrow (\neg P))$.

Exercice 7 :
Démontrer la loi de De Morgan à l'aide d'une table de vérité.

Exercice 8 :

a) Établir la table de vérité de la proposition $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (P \vee Q)$

b) À quelle proposition plus simple cette proposition est-elle équivalente ?

c) Reprendre les questions a et b avec la proposition $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$

Exercice 9 :

a) Établir la table de vérité des deux propositions suivantes :
   (1) $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow R$
   (2) $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$

b) Ces deux propositions sont-elles équivalentes ?

c) Les deux propositions $(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow R$ et $P \Leftrightarrow (Q \Leftrightarrow R)$ sont-elles équivalentes ?

Exercice 10 :
À l'aide d'une table de vérité, établir la proposition : $(P \vee (\overline{P} \wedge Q)) \Leftrightarrow (P \vee Q)$.

Exercice 11 (principe d'absorption) **:**
À l'aide d'une table de vérité, établir la première propriété d'absorption : $(P \vee (P \wedge Q)) \Leftrightarrow P$.

Exercice 12 (simplification) **:**

a) À l'aide des propriétés des connecteurs logiques, simplifier la proposition suivante :
$\overline{((\overline{P} \vee Q) \vee \overline{R}) \wedge (\overline{P} \vee (\overline{Q} \vee \overline{R}))}$.

b) Vérifier la simplification précédente à l'aide d'une table de vérité.

Exercice 13 :

a) P , Q et R étant des propositions quelconques, établir la table de vérité de chacune des propositions suivantes :

(1) $(P \wedge Q) \Rightarrow R$

(2) $(P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R)$

(3) $(P \Rightarrow R) \vee (Q \Rightarrow R)$

b) En déduire l'équivalence de deux de ces trois propositions.

Exercice 14 :

a) Rappeler le principe de contraposition.

b) Quelle phrase est logiquement équivalente à : "s'il pleut, alors il y a des nuages" ?

c) La négation de l'implication $P \Rightarrow Q$ est-elle une implication ?

d) Donner la négation de la proposition "Si il est majeur, alors il a son permis de conduire".

e) Un professeur de logique dit à l'un de ses élèves : "si vous ne faites pas le travail demandé, vous serez sanctionné". L'élève fait le travail demandé, mais est quand même sanctionné. Quelle erreur de logique a fait l'élève en pensant ne pas être sanctionné ?

Exercice 15 :

a) Déterminer une proposition équivalente à $P \Rightarrow Q$ n'utilisant que la négation et la disjonction.

b) En déduire une proposition équivalente à $P \Leftrightarrow Q$ n'utilisant que la négation et la disjonction.

Exercice 16 (opérateur "nand") **:**
La barre de Sheffer est le connecteur binaire qui, à toutes propositions P et Q, associe la proposition, notée $P|Q$, équivalente à $\neg(P \wedge Q)$.

a) Établir la table de vérité de $P|Q$.

b) Établir que pour toute proposition P, $\neg P \Leftrightarrow (P|P)$.

Exercice 17 (opérateur "nor") **:**
Le connecteur de Pierce est le connecteur binaire qui, à toutes propositions P et Q, associe la proposition, notée $P \downarrow Q$, équivalente à $\neg(P \vee Q)$.

a) Établir la table de vérité de $P \downarrow Q$.

b) Pour chacune des propositions suivantes, déterminer une proposition équivalente utilisant uniquement le connecteur $\downarrow$:

(1) $\neg P$

(2) $P \vee Q$

(3) $P \wedge Q$

Exercice 18 :
On met quatre cartes devant vous. Chaque carte a une lettre d'un côté, un nombre de l'autre. Certaines sont placées côté lettre, d'autre côté nombre. Les 4 face visibles sont :
$\boxed{\text{A}}$, $\boxed{5}$, $\boxed{\text{E}}$, $\boxed{3}$.
Pour chacune des règles suivantes, donner la liste des cartes à retourner au minimum pour savoir si cette règle est vraie ou non :

a) S'il y a un A d'un côté, alors il y a un 3 de l'autre.

b) S'il y a un 3 d'un côté, alors il y a un A de l'autre.

Exercice 19 :
Quatre personnes sont en train de boire dans un bar et vous disposez des informations suivantes : la première boit une boisson alcoolisée, la seconde a moins de 18 ans, la troisième a plus de 18 ans et la dernière boit une boisson sans alcool. Quelle(s) personne(s) devez-vous interroger sur leur âge ou sur le contenu de leur verre pour vous assurer que tous respectent bien la règle suivante : Si une personne boit de l'alcool, elle doit avoir plus de 18 ans.