Chapitre 3 - Calcul booléen

Partie 2 : calcul ensembliste

1 Notion d'ensemble

Définition

- Un ensemble désigne une collection d'objets, qui sont appelés les éléments de l'ensemble. Un ensemble fini se note entre accolades.
- Pour tout ensemble E, si x est un élément de E, on dit que x appartient à E, et on note $x \in E$.
- Si le nombre d'éléments appartenant à un ensemble E est fini, on dit que E est un ensemble fini et on appelle cardinal de E le nombre d'éléments de E, noté $\text{Card}(E)$.
- On dit qu'un ensemble A est inclus dans un ensemble E si tout élément de A est aussi élément de E. On dit alors que A est un sous-ensemble ou une partie de E, et on note $A \subset E$.
- L'ensemble vide, noté $\emptyset$ est l'ensemble ne contenant aucun élément.

Exemple : $E = \{1; 2; 15; 4\}$ est un ensemble. Alors :

Définition

Soit E un ensemble non vide, $P(E)$ est l'ensemble des sous-ensembles (ou parties) de E.

Exemple : Si $E = \{2; 5; 4\}$,
$P(E) =$ ....

Proposition

Si $\text{Card}(E) = n$, alors $\text{Card}(P(E)) = 2^n$.

2 Opérations sur les ensembles

Définition

Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E. L'union des ensembles A et B, notée $A \cup B$, est l'ensemble des éléments de E appartenant au moins à l'un des deux ensembles A ou B. Autrement dit :

$$A \cup B = \{x \in E \,/\, (x \in A) \vee (x \in B)\}.$$

Exemple : Si $A = \{1; 3; 4\}$ et $B = \{2; 3; 5\}$, alors $A \cup B =$ ....

Définition

Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E. L'intersection des ensembles A et B, notée $A \cap B$, est l'ensemble des éléments de E appartenant à la fois à A et à B. Autrement dit :

$$A \cap B = \{x \in E \,/\, (x \in A) \wedge (x \in B)\}.$$

Exemple : Si $A = \{1; 3; 4\}$ et $B = \{2; 3; 5\}$, alors $A \cap B =$ ....

Définition

Soient A un sous-ensemble de E. Le complémentaire de A dans E, noté $\overline{A}$ est composé des éléments de E qui n'appartiennent pas à A. Autrement dit :

$$\overline{A} = \{x \in E \,/\, x \notin A\} = \{x \in E \,/\, \neg(x \in A)\}.$$

Exemples : Soit $E = \{1; 2; 3; 4; 5\}$.

- Si $A = \{1; 3; 4\}$, alors $\overline{A} =$ ....
- $\overline{\emptyset} =$ ....
- $\overline{E} =$ ....

Propriétés :

- Complément :
- Éléments neutres/absorbants :
- Associativité :
- Commutativité :
- Distributivité :
- Loi de De Morgan :

3 Exercices

Exercice 1 :
Soit E l'ensemble $E = \{1; 2; 3; 4\}$. Donner tous les éléments de $P(E)$.

Exercice 2 :
Soient A, B et C des parties d'un ensemble E. Illustrer graphiquement les ensembles suivants :

1) $A \cup \overline{B}$
2) $\overline{A} \cup \overline{B}$
3) $\overline{A} \cap \overline{B}$
4) $A \cap B \cap C$
5) $A \cap B \cap \overline{C}$
6) $A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$
7) $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$
8) $(A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B)$
9) $(A \cap \overline{B}) \cup (B \cup C)$

Exercice 3 :
Soient A, B et C des parties d'un ensemble E. Simplifier :

1) $A \cap \emptyset$
2) $A \cup \emptyset$
3) $A \cap E$
4) $A \cup E$
5) $(A \cap \emptyset) \cup E$
6) $A \cap (A \cap B)$
7) $A \cup (A \cup B)$
8) $A \cap \overline{A}$
9) $A \cap (\overline{A} \cap B)$
10) $A \cup (\overline{A} \cup B)$
11) $(\overline{A} \cap B) \cup (A \cap B)$
12) $A \cup \overline{A} \cup (A \cup B)$
13) $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (A \cap \overline{B} \cap C)$
14) $(A \cup B \cup \overline{C}) \cap C \cap \overline{B}$
15) $\overline{A \cup B \cup \overline{C}} \cap A$

Exercice 4 (Différence de deux ensembles) **:**
Pour des parties A et B d'un ensemble E, on définit la différence de A et de B, notée $A \setminus B$ par $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.

1) Illustrer cette notion par une figure.
2) Déterminer les ensembles $\overline{A} \setminus \overline{B}$, $A \setminus A$, $A \setminus E$ et $A \setminus \emptyset$.
3) Montrer que si A, B et C sont des parties de E, on a $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$.

Exercice 5 (Différence symétrique de deux ensembles) **:**
Pour des parties A et B d'un ensemble E, on définit la différence symétrique de A et de B, notée $A \Delta B$, par $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

1) Illustrer cette notion par une figure. Justifier que $A \Delta B = B \Delta A$.
2) Exprimer $A \Delta B$ uniquement à l'aide des opérateurs de complémentation, d'intersection et de réunion.
3) Déterminer les ensembles $A \Delta A$, $A \Delta E$ et $A \Delta \emptyset$.

Exercice 6 :
Soient A, B et C des parties d'un ensemble E. À l'aide de simples dessins, préciser si l'une ou l'autre de ces implications est exacte :

a) $A \cap C = B \cap C \Rightarrow A = B$,
b) $A \cup C = B \cup C \Rightarrow A = B$.