Université Pierre et Marie Curie — Année 2012-2013
LM115 — Semestre 1

Analyse 2 - Suites et intégrales

Travaux Dirigés 10 - Intégrales de Riemann, primitives

Exercice 1 (Questions de cours)

1. Énoncer et démontrer la première formule de la moyenne pour les intégrales.
2. Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, où $a, b \in \mathbb{R}$, et soit $x_0 \in [a, b]$. Montrer que la fonction F_0 définie sur $[a, b]$ par
$$F_0(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt$$
est dérivable sur $]a, b[$ avec $F_0'(x) = f(x)$.

Exercice 2

Soient a et b deux réels tels que $a < b$. calculer $\int_a^b E(x)dx$.

Exercice 3

Soit f une fonction réelle continue sur $\mathbb{R}$.
On définit g sur $\mathbb{R}$ par : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \int_0^x tf(t)dt$.

1. Montrer que g est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
3. Montrer que si f est une fonction paire alors g est également paire.

Exercice 4

Pour tout entier $n \geq 0$ on pose
$$u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx.$$

1. Justifier l'existence de u_n pour tout entier naturel n.
2. Montrer que $u_n > 0$ pour tout n.
3. Montrer que la suite (u_n) est décroissante et converge vers 0.

Exercice 5

Soit f dérivable sur $[a, b]$ et $M > 0$ tels que
$$f(a) = f(b) = 0, \quad \forall x \in [a, b], \ |f'(x)| \leq M.$$

Montrer que

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \frac{M\,(b-a)^2}{4}.$$

Exercice 6

Soit f une fonction continue et positive sur $[a,b]$, démontrer que

$$\int_a^b f(x)dx = 0 \Longleftrightarrow \forall x \in [a,b], f(x) = 0$$

Exercice 7

Soit f une fonction contiune sur $[a,b]$ telle que pour toute fonction g continue sur $[a,b]$ on ait

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0.$$

Montrer que f est nulle sur $[a,b]$.

Exercice 8

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{2}.$$

Montrer qu'il existe $\alpha \in]0,1[$ tel que $f(\alpha) = \alpha$. On pourra introduire la fonction $G(x) = \int_0^x f(t)dt - \frac{x^2}{2}$.

Exercice 9

Soit la suite (u_n) définie par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n(n+k)}}.$$

Montrer que (u_n) converge et calculer sa limite.
Même chose avec la suite (v_n) définie par

$$v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$$

Exercice 10

Trouver l'ensemble des fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ telles que

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| = \int_a^b |f(x)|dx.$$

Exercice 11

En les comparant à des intégrales bien choisies, étudier les suites

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

Exercice 12

En utilisant la formule de la moyenne, calculer la limite lorsque x tend vers 0 à droite de $\int_x^{x^2} \frac{e^{-1/t}}{t} dt$.

Exercice 13 (Annale)

Pour tout réel $x > 0$ on considère l'intégrale :

$$I(x) = \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{2x}} \ln(t^2) dt.$$

1. Montrer que I est bien définie.
2. On fixe un réel $x > 0$. Donner un majorant et un minorant dépendant de x de la fonction $t \mapsto \ln(t^2)$ sur l'intervalle $[\sqrt{x}, \sqrt{2x}]$.
3. Quelle est la limite de $\sqrt{x}\ln(x)$ lorsque x tend vers 0 ?
4. Montrer que l'application $I :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ admet une limite à droite en zéro que l'on déterminera.