

Analyse 2 - Suites et intégrales

Travaux Dirigés 11 - Calcul de primitives

Exercice 1 (Questions de cours)

1. Énoncer et démontrer le théorème d'intégration par partie.
2. Énoncer le théorème de changement de variable.

Exercice 2

1. Montrer que si f est une fonction continue, de signe constant, et d'intégrale nulle sur $[a, b]$, alors f est nulle sur $[a, b]$.
2. Soit f une fonction continue et non identiquement nulle sur $[a, b]$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $\int_a^b t^k f(t) dt = 0$ pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$, alors f s'annule en changeant de signe en au moins $n + 1$ points.

Exercice 3

Soit f une fonction de classe C^1 , démontrer que la suite définie par $u_n = \int_a^b f(t) \sin(nt) dt$ tend vers 0 quand n tend vers ∞

Exercice 4

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, montrer que $H(x) = \int_1^x \frac{3t+1}{t(t+1)^2} dt$ est bien définie.
2. Montrer qu'il existe trois nombres réels a , b et c que l'on calculera tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\} \quad \frac{3x+1}{x(x+1)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2}$$

3. Calculer $H(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$
4. Montrer que H admet une limite en $+\infty$ que l'on déterminera.

Exercice 5 (Calculs d'intégrales)

Calculer les intégrales suivantes, après avoir justifié leur existence :

- | | | |
|--|---|----------------------------------|
| 1. $\int_0^\pi \frac{\sin(t)}{1+\cos^2(t)} dt$ | 3. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} dt$ | 5. $\int_0^1 \frac{1}{e^t+1} dt$ |
| 2. $\int_0^1 \frac{1}{t^2+2} dt$ | 4. $\int_0^4 \sqrt{t}(t-2\sqrt{t}) dt$ | 6. $\int_0^1 \frac{dt}{t^3+1}$ |

Exercice 6

Calculer les primitives des fonctions suivantes en précisant les intervalles sur lesquels cela est possible :

1. $f(x) = \tan(x)$
2. $g(x) = \frac{x^2}{x^2+x-2}$
3. $h(x) = (x^2 + x + 1)e^x$
4. $k(x) = \frac{x^3-x^2-3x+4}{x^2-2x+1}$
5. $l(x) = \frac{x+3}{x^2-3x-40}$
6. $m(x) = \frac{10x^2+12x+20}{x^3-8}$

Exercice 7 (Annale)

L'objectif est de donner une valeur de

$$I = \int_0^{1/2} \frac{e^{-t}}{1-t} dt.$$

1. Justifier l'existence de I .
2. Calculer l'intégrale $J = \int_0^{1/2} e^{-t}(1+t)$.
3. (a) Montrer que, pour tout $t \neq 1$, $\frac{1}{1-t} = 1 + t + \frac{t^2}{1-t}$.
 (b) Montrer que pour tout $t \in [0, 1/2]$, on a : $\frac{t^2}{\sqrt{e}} \leq \frac{e^{-t}}{1-t} - e^{-t}(1+t) \leq 2t^2$.
 (c) En déduire un encadrement de I .

Exercice 8 (Annale)

Pour tout réel $x \neq 1$, on considère le réels

$$f(x) = \frac{4x^2 + 2x + 3}{(x+1)(4x^2+1)}.$$

1. Montrer que f ainsi définie est une application intégrable au sens de Riemann sur $[0, 1]$.
2. Trouver trois réels a , b et c tels que pour tout réel $x \in [0, 1]$,

$$f(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{4x^2+1}.$$

3. Calculer l'intégrale de f entre 0 et 1.

Exercice 9 (Annale)

On considère la suite (w_n) donnée pour tout entier naturel n par

$$w_n = \int_0^1 \frac{\ln(1+x^n)}{(1+x)(2-x)} dx.$$

1. Trouver deux réels a et b tels que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}, \quad \frac{1}{(1+x)(2-x)} = \frac{a}{1+x} + \frac{b}{2-x}.$$

2. Calculer w_0 .
3. Montrer que la suite (w_n) est décroissante et positive.
4. Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$, $\ln(1+x) \leq x$.
5. Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$,

$$\frac{\ln(1+x^n)}{(1+x)(2-x)} \leq x^n,$$

et en déduire une majoration de w_n .

6. Montrer que (w_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 10 (Annale)

Soit $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue.

1. Citer un théorème du cours montrant que g est bornée sur $[0, 1]$.
2. Pour tout entier naturel n , justifier l'existence de

$$I_n = \int_0^1 e^{-nx} g(x) dx.$$

3. Calculer I_0 dans le cas particulier où $g(x) = xe^{-x}$.
4. Soit M un majorant de $|g|$ sur $[0, 1]$. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $|I_n| \leq \frac{M}{n}$.
5. En déduire que (I_n) converge et préciser sa limite.
6. On suppose maintenant que g est dérivable à dérivée continue sur $[0, 1]$ et vérifie $g(0) = 1$. Soit J_n défini pour $n \geq 1$ par

$$J_n = n \int_0^1 e^{-nx} g(x) dx.$$

À l'aide d'une intégration par partie, montrer que la suite (J_n) est convergente. Préciser sa limite.

Exercice 11

L'objectif est de calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2}}, \quad J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 2}} dx, \quad K = \int_0^1 \sqrt{x^2 + 2} dx$$

1. Soit f la fonction définie sur $[0, 1]$ par $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 2})$. Calculer sa dérivée, en déduire I .
2. Calcul de J et de K .
 - (a) Montrer que $J + 2I = K$.
 - (b) À l'aide d'une intégration par parties portant sur K , montrer que $K = \sqrt{3} - J$
 - (c) En déduire les valeurs de J et de K .

Exercice 12

1. Démontrer la formule trigonométrique suivante, puis déterminer une primitive de $\sin^2$.

$$\sin^2(t) = \frac{1 - \cos(2t)}{2}.$$

2. Soit $a > 0$, on cherche à calculer $I = \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx$.
En effectuant le changement de variable défini par $x = a \cos(t)$ pour $t \in [0, \pi/2]$, montrer que

$$I = a^2 \int_0^{\pi/2} \sin^2(t) dt.$$

Justifier bien le changement de variable (attention aux bornes).

3. Déterminer la valeur de I .

Exercice 13 (Intégrales de Wallis)

Pour tout entier $n \geq 0$ on pose

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) dt$$

1. Calculer W_0 , W_1 , W_2 et W_3 .
2. Soit n un entier. En utilisant une intégration par parties montrer que

$$W_{n+2} = (n+1)(W_n - W_{n+2})$$

et exprimer W_{n+2} en fonction de W_n .

3. Calculer W_{2k} et W_{2k+1} en fonction de $k \in \mathbb{N}$.
4. Montrer que (W_n) est décroissante et strictement positive.
5. En exploitant l'inégalité $W_{n+1} \leq W_n \leq W_{n-1}$, montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{W_n}{W_{n+1}} = 1$$

6. On pose $u_n = nW_nW_{n+1}$. Montrer par récurrence que pour tout n on a $u_n = \frac{n}{n+1}\pi$.
7. En conclure un équivalent simple de (W_n) . [On appelle équivalent d'une suite (u_n) une suite (α_n) telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{\alpha_n} = 1$]

Exercice 14

Calculer les intégrales suivantes à l'aide de l'intégration par parties

- | | |
|--|--|
| 1. $\int_0^1 \arctan(t) dt$ | 4. $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \arcsin(x) dx$ |
| 2. $\int_0^1 x \cos(x) dx$ | 5. $\int_0^1 (x^2 + x + 1)e^x dx$ |
| 3. $\int_1^x t^n \ln(t) dt$ où $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$ | 6. $\int_0^1 \frac{u}{\sqrt{1+u}} du$. |

Exercice 15

Calculer, à l'aide d'un ou plusieurs changements variables, les intégrales suivantes :

1. $I_1 = \int_e^x \frac{dt}{t \ln^2(t)}$ où x est un réel, $x > e$
2. $I_2 = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} \frac{t^2}{1-t^3} dt$ (on posera $u = \frac{1}{t}$).
3. $I_3 = \int_2^3 \ln(t^{\frac{1}{3}} - 1) dt$ (on posera $u = t^{\frac{1}{3}}$).
4. $I_4 = \int_1^x \frac{dt}{t\sqrt{1+t}}$ où x est un réel, $x > 1$ (on posera $u = \sqrt{1+t}$).