

Analyse 2 - Suites et intégrales

Travaux Dirigés 1 - Logique, quantificateurs, ensembles

Éléments de logique et langage mathématique

Un ingénieur, un physicien et un logicien sont dans un train en Écosse. Ils voient un mouton noir sur le bord de la route. « Les moutons écossais semblent être noirs. » dit l'ingénieur. « Non, il est plus correct de dire qu'au moins un mouton écossais est noir. » corrige le physicien. « Non, il est plus correct de dire qu'il a existé à un instant donné en Écosse au moins un mouton dont l'un des côtés au moins est noir ! » dit le logicien...

Exercice 1 (Question de cours)

1. Soient P et Q deux assertions. Rappeler la définition des assertions $\neg P$, P et Q , P ou Q , $P \Rightarrow Q$, et $P \Leftrightarrow Q$.
2. Écrire la négation des assertions précédentes.
3. Démontrer le principe de contraposition.

Exercice 2

Considérons l'énoncé suivant : "Il faut être majeur pour voter".

1. L'énoncer avec le signe $\Rightarrow$, puis écrire sa contraposée.
2. Les raisonnements suivants sont-ils corrects ?
 - (a) Paul a voté, donc Paul est majeur.
 - (b) Pierre n'a pas voté, donc Pierre n'est pas majeur.
 - (c) Carole est majeure, donc Carole a voté.

Exercice 3

On considère la proposition suivante

$$P(x, y) : x \text{ est la fille de } y.$$

Traduire en termes mathématiques les phrases suivantes :

1. Toute femme a une mère.
2. Toute femme a au moins deux filles.
3. Il existe une femme qui est la mère de toutes les autres femmes.

Exercice 4

Les propositions suivantes sont-elles vraies ? Sinon, énoncer leur négation.

1. $\exists x \in \mathbb{N}, x^2 > 5$.
2. $\forall x \in \mathbb{N}, x^2 > 5$.
3. $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N}, y > x^2$.
4. $\exists y \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{N}, y > x^2$.
5. $\exists x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{N}, y > x^2$.
6. $\forall y \in \mathbb{N}, \exists x \in \mathbb{N}, y > x^2$.

Exercice 5

1. Écrire en français les propositions

$$P1 : (\exists x, \forall y, A(x, y)) \quad \text{et} \quad P2 : (\forall y, \exists x, A(x, y)).$$

2. L'une de ces propositions implique-t-elle la seconde? Ces deux propositions sont-elles équivalentes? Qu'en concluez-vous sur le changement de l'ordre des quantificateurs dans une proposition?

Ensembles et applications

Exercice 6

Associer à chaque élément de la liste A un élément de la liste B.

Liste A :

- (a) ensemble des entiers naturels impairs
- (b) ensemble des entiers relatifs pairs
- (c) $\{-11, -10, -9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$
- (d) $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
- (e) ensemble des nombres rationnels

Liste B :

- (1) $\{x \in \mathbb{N} \mid x^2 \leq 101\}$
- (2) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 122 \text{ et } x \in \mathbb{Z}\}$
- (3) $\{x \in \mathbb{R} \mid \exists k \in \mathbb{N}, x = 2k + 1\}$
- (4) $\{x \in \mathbb{R} \mid \exists p \in \mathbb{Z}, x = 2p\}$
- (5) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2x + 1 \geq 0 \text{ et } x \in \mathbb{Q}\}$

Exercice 7

Généralement, pour démontrer que deux ensembles F et G sont égaux, on montre que $F \subset G$ et que $G \subset F$. Soient A , B , et C des sous-ensembles d'un ensemble E . Montrer les formules suivantes :

1. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.
2. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.
3. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

4. $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B$.
5. $A \cup B = B \Leftrightarrow A \subset B$.

Exercice 8

Soient E et F deux ensembles et $f : E \rightarrow F$ une application. Démontrer les propriétés suivantes :

1. $\forall A, B \subset E, A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$.
2. $\forall A, B \subset E, f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
3. $\forall A, B \subset E, f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
4. $\forall A, B \subset F, f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.
5. $\forall A \subset E, A \subset f^{-1}(f(A))$.
6. $\forall A \subset F, f(f^{-1}(A)) \subset A$.

Exercice 9

Soient $f : A \rightarrow B$ et $g : B \rightarrow C$ deux applications. Démontrer les propriétés suivantes :

1. $g \circ f$ est injective $\Rightarrow f$ est injective.
2. $g \circ f$ est surjective $\Rightarrow g$ est surjective.

Montrer par des exemples que les réciproques sont fausses.

Exercice 10

Soit $f : X \rightarrow Y$ une application. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

1. f est injective.
2. $\forall A, B \subset X, f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.
3. $\forall A, B \subset X, A \cap B = \emptyset \Rightarrow f(A) \cap f(B) = \emptyset$.

Exercice 11

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

1. $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$.
2. La somme des n premiers nombres impairs est égale à n^2 .

Exercice 12

1. Soit $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ une application strictement croissante. Montrer que $f(n) \geq n$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
2. Que dire lorsque f est surjective ?