

Analyse 2 - Suites et intégrales

Travaux Dirigés 1 - Logique, quantificateurs, ensembles

adresse mail : amandine.schreck@telecom-paristech.fr
page web : <http://perso.telecom-paristech.fr/~schreck/>

Connecteurs logiques et tables de vérité

Dans toute cette feuille, on note P , Q ou R des **propositions mathématiques**, c'est-à-dire des énoncés susceptibles d'être vrais ou faux. Par définition, la proposition

$$(P \text{ et } Q)$$

est vraie si, et seulement si, P et Q sont vraies simultanément. On résume ceci dans le tableau suivant, appelé **table de vérité** (où V et F signifient vrai et faux) :

P	Q	(P et Q)
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

De même, la proposition $(P \text{ ou } Q)$ est vraie si, et seulement si, l'une au moins des deux propositions P et Q est vraie.

Exercice 1

1. Donner la table de vérité de la proposition $(P \text{ ou } Q)$.
2. *Que fait un étudiant en mathématiques lorsque, sur un menu, il voit écrit "fromage ou dessert" ?*

Exercice 2

1. Ecrire la table de vérité de la proposition " $(P \text{ et } Q) \text{ ou } R$ ", puis celle de " $(P \text{ ou } R) \text{ et } (Q \text{ ou } R)$ ". Conclusion ?
2. Ecrire la table de vérité pour la proposition $(\text{non}P)$, appelée négation de P .
3. Quelle est la négation de la phrase "*il fait beau et les oiseaux chantent*" ? De façon générale, la proposition $\text{non}(P \text{ et } Q)$ est équivalente à une autre proposition. Laquelle ?
4. Le vérifier à l'aide d'une table de vérité.

Exercice 3

L'affirmation suivante, qui suit des règles de calcul usuelles dans $\mathbb{R}$, est vraie :
pour tout nombre réel x , si $x = 2$, alors $x^2 = 4$.

On appelle P l'affirmation " $x = 2$ ", et Q l'affirmation " $x^2 = 4$ ".

1. Si P est vraie, est-ce que Q est toujours vraie ?
2. Si P est fausse, est-ce que Q est toujours fausse ?
3. Proposer une table de vérité pour la proposition $P \Rightarrow Q$, qui se lit P implique Q , et qui exprime l'affirmation "si P est vraie, alors Q est vraie".
4. On appelle P la proposition "*il fait beau*", et Q la proposition "*j'irai à la plage*". L'affirmation "si il fait beau, alors j'irai à la plage" exprime-t-elle une implication au sens mathématique ?

Exercice 4

La proposition $(\text{non}Q) \Rightarrow (\text{non}P)$ s'appelle **contraposée** de la proposition $P \Rightarrow Q$.

1. Etablir la table de vérité de $(\text{non}Q) \Rightarrow (\text{non}P)$. Conclusion ?
2. Décomposer sous forme logique la phrase "*Si la programmation me plaît et si le tarif est raisonnable, je vais m'abonner à l'opéra Bastille.*" On introduira pour ceci trois propositions P , Q et R .
3. Ecrire la contraposée de la proposition obtenue, et traduire en français cette contraposée.

Exercice 5

1. Écrire la table de vérité pour la proposition $(P \Leftrightarrow Q)$, qui exprime l'affirmation " P est vraie si et seulement si Q est vraie".
2. Quelle est la négation de cette affirmation ?

Quantificateurs et éléments de logique

Un ingénieur, un physicien et un logicien sont dans un train en Écosse. Ils voient un mouton noir sur le bord de la route. « Les moutons écossais semblent être noirs. » dit l'ingénieur. « Non, il est plus correct de dire qu'au moins un mouton écossais est noir. » corrige le physicien. « Non, il est plus correct de dire qu'il a existé à un instant donné en Écosse au moins un mouton dont l'un des côtés au moins est noir ! » dit le logicien...

Exercice 6

On considère la proposition suivante

$$P(x, y) : x \text{ est la fille de } y.$$

Traduire en termes mathématiques les phrases suivantes :

1. Toute femme a une mère.
2. Toute femme a au moins deux filles.
3. Il existe une femme qui est la mère de toutes les autres femmes.

Exercice 7

Les propositions suivantes sont-elles vraies ? Sinon, énoncer leur négation.

- | | | |
|--|--|--|
| 1. $\exists x \in \mathbb{N}, x^2 > 5$. | 3. $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N}, y > x^2$. | 5. $\exists x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{N}, y > x^2$. |
| 2. $\forall x \in \mathbb{N}, x^2 > 5$. | 4. $\exists y \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{N}, y > x^2$. | 6. $\forall y \in \mathbb{N}, \exists x \in \mathbb{N}, y > x^2$. |

Exercice 8

1. Soit A une assertion. Écrire en français les propositions

$$P1 : (\exists x, \forall y, A(x, y)) \quad \text{et} \quad P2 : (\forall y, \exists x, A(x, y)).$$

2. L'une de ces propositions implique-t-elle la seconde ? Ces deux propositions sont-elles équivalentes ? Qu'en concluez-vous sur le changement de l'ordre des quantificateurs dans une proposition ?

Exercice 9

Considérons l'énoncé suivant : "Il faut être majeur pour voter".

1. L'énoncer avec le signe $\Rightarrow$, puis écrire sa contraposée.
2. Les raisonnements suivants sont-ils corrects ?
 - (a) Paul a voté, donc Paul est majeur.
 - (b) Pierre n'a pas voté, donc Pierre n'est pas majeur.
 - (c) Carole est majeure, donc Carole a voté.