Université Pierre et Marie Curie — Année 2012-2013
LM115 — Semestre 2

Analyse 2 - Suites et intégrales

Travaux Dirigés 2

adresse mail : amandine.schreck@telecom-paristech.fr
page web : http ://perso.telecom-paristech.fr/∼schreck/

Méthodes de démonstration

Exercice 1

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$:

1. $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.
2. La somme des n premiers nombres impairs est égale à n^2.

Exercice 2

Que penser de la démonstration suivante :

Pour tout entier $n \geq 2$, on considère la propriété P_n donnée par "n points quelconques du plan sont toujours alignés." Nous allons la démontrer par récurrence.

On initialise au rang 2 : P_2 est vraie car 2 points du plan sont toujours alignés.

Supposons maintenant que pour un certain entier naturel n, P_n soit vérifiée pour un certain entier naturel $n \geq 2$. Supposons que $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ sont $n+1$ points quelconques du plan. Par hypothèse de récurrence, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont alignés sur une droite que l'on notera D. De même $A_2, \ldots, A_{n+1}$ sont alignés sur une droite D'. Comme D et D' contiennent toutes les deux les points $A_2, \ldots, A_n$, elles sont confondues. Par conséquent, les points $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ sont alignés. On a prouvé que P_{n+1} est vérifiée.

Conclusion : la propriété P_n est vraie au rang initial et héréditaire. Elle est donc vraie à tout rang.

Exercice 3 (Preuve par contre-exemple)

L'affirmation suivante est-elle vraie ? Justifiez.
"Pour tous nombres réels a, b, c, si $a \leq b$, alors $ac \leq bc$."

Exercice 4 (Preuve par contraposée)

On considère sept réels $x_1, \ldots, x_7$ tels que $\sum_{i=1}^{7} x_i = 0$. Montrer qu'il existe un i tel que $x_i \leq 0$.

Exercice 5

Montrer que pour tout entier n, si n^2 est pair, alors n est pair.

Exercice 6 (Preuve par l'absurde)

Démontrer par l'absurde que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Exercice 7

1. Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application strictement croissante. Montrer que $f(n) \geq n$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
2. Que dire lorsque f est surjective ?

Exercice 8 (Preuve par analyse et synthèse)

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On dit que f est *paire* si, pour tout nombre x, on a $f(-x) = f(x)$. On dit que f est *impaire* si, pour tout nombre x, on a $f(-x) = -f(x)$. On voudrait montrer le théorème suivant :

Théorème. *Toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s'écrit de façon unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.*

1. En supposant que $f = f_p + f_i$ où f_p est une fonction paire et f_i une fonction impaire, trouver une expression de f_p et de f_i à partir de f. Quel morceau du théorème a-t-on démontré ?
2. Que reste-t-il à faire ? Finir la preuve du théorème.

Ensembles et applications

Exercice 9

Associer à chaque élément de la liste A un élément de la liste B.

Liste A :

(a) ensemble des entiers naturels impairs

(b) ensemble des entiers relatifs pairs

(c) $\{-11, -10, -9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$

(d) $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

(e) ensemble des nombres rationnels

Liste B :

(1) $\{x \in \mathbb{N} \,|\, x^2 \leq 101\}$

(2) $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 \leq 122 \text{ et } x \in \mathbb{Z}\}$

(3) $\{x \in \mathbb{R} \,|\, \exists k \in \mathbb{N}, x = 2k + 1\}$

(4) $\{x \in \mathbb{R} \,|\, \exists p \in \mathbb{Z}, x = 2p\}$

(5) $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 - 2x + 1 \geq 0 \text{ et } x \in \mathbb{Q}\}$

Exercice 10

Soit E un ensemble de cardinal fini $n \geq 1$. Montrer par récurrence que $\mathcal{P}(E)$, l'ensemble des parties de E est de cardinal 2^n.

Exercice 11

Soient A, B, et C des sous-ensembles d'un ensemble E. Montrer les formules suivantes :

1. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.
2. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.
3. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
4. $[A \cap B = A] \Leftrightarrow [A \subset B]$.
5. $[A \cup B = B] \Leftrightarrow [A \subset B]$.

Exercice 12

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $g(x) = x^2$. Donner l'image par g de $\{0\}$ et de $[0,2]$. Donner l'image réciproque par g de $\{1\}$, de $\{-1\}$.

Exercice 13 (Vrai ou Faux)

On considère la fonction $f : x \mapsto x^4$. Les phrases sont-elles vraies ou fausses ?

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$ est une application surjective.
2. $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est une application surjective.
3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une application injective.
4. $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est une application injective.
5. $f : [-1,1] \to [0,1]$ est bijective.
6. $f : [0,2] \to [0,2]$ est bijective.
7. $f : [0,1] \to [0,2]$ est bijective.
8. $f : [0,1] \to [0,1]$ est bijective.
9. f s'annule au plus deux fois sur $\mathbb{R}$.
10. f s'annule au moins deux fois sur $\mathbb{R}$.

Exercice 14

1. Soit $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^\star \to \mathbb{Q}$ l'application définie par $f(m,n) = \frac{m}{n}$. Est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?
2. Même question avec $g : \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^\star \to \mathbb{Q}$ définie par $g(m,n) = m + \frac{1}{1+n}$.

Exercice 15

Remarque : souvent, pour démontrer que deux ensembles F et G sont égaux, on montre que $F \subset G$ et que $G \subset F$. Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application. Démontrer les propriétés suivantes :

1. $\forall A, B \subset E, A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$.
2. $\forall A, B \subset E, f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
3. $\forall A, B \subset E, f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
4. $\forall A, B \subset F, f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.
5. $\forall A \subset E, A \subset f^{-1}(f(A))$.
6. $\forall A \subset F, f(f^{-1}(A)) \subset A$.

Exercice 16

Soient $f : A \to B$ et $g : B \to C$ deux applications. Démontrer les propriétés suivantes :

1. $g \circ f$ est injective $\Rightarrow f$ est injective.
2. $g \circ f$ est surjective $\Rightarrow g$ est surjective.

Montrer par des exemples que les réciproques sont fausses.

Exercice 17

Soit $f : X \to Y$ une application. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

1. f est injective.
2. $\forall A, B \subset X,\ f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.
3. $\forall A, B \subset X,\ A \cap B = \emptyset \Rightarrow f(A) \cap f(B) = \emptyset$.