Université Pierre et Marie Curie — Année 2012-2013
LM115 — Semestre 1

Analyse 2 - Suites et intégrales

Travaux Dirigés 3 - Nombre réels, approximation, propriétés topologiques

Exercice 1 (Premiers exemples)

1. Donner la partie entière de 2.1.
2. Donner une approximation à 10^{-3} près de 1/3.
3. Donner une approximation à 10^{-2} près de 1/7.
4. Donner la partie entière de $-\sqrt{2}$.
5. Rappeler la définition de voisinage. Donner un voisinage de 15.
6. Donner une approximation de π par défaut à 10^{-2} près.

Exercice 2

Que peut-on dire d'un nombre réel x tel que :

1. $\forall \epsilon > 0, \quad x \leq 900\epsilon$
2. $\forall \epsilon > 0, \quad -4\epsilon \leq x < \epsilon$
3. $\forall \epsilon > 0, \quad -4 + \epsilon \leq x < \epsilon$

Exercice 3

1. Rappeler la définition de la partie entière d'un réel.
2. A-t-on toujours $E(x+y) = E(x) + E(y)$ pour x et y réels ? Donner un encadrement de $E(x+y) - E(x) - E(y)$.
3. Etudier les fonctions suivantes :
   (a) $f(x) = E(x+1) - E(x)$
   (b) $g(x) = E(x+1/2) - E(x)$
   (c) $h(x) = E(x) + E(\frac{1}{x})$ définie pour $x > 0$

Exercice 4

1. Montrer qu'un intervalle borné ayant un minimum mais pas de maximum est de la forme $[a, b[$.
2. $[a, b[$ est-il un intervalle ouvert ?

Exercice 5 (Approximation décimale)

1. Soit x un réel. Montrer que pour tout entier $k \geq 0$ il existe un entier relatif a_k tel que
$$a_k 10^{-k} \leq x < a_k 10^{-k} + 10^{-k}.$$
2. Montrer que la suite définie pour $k \geq 0$ par $x_k = 10^{-k} a_k$ converge vers x.
3. Montrer que l'ensemble $\mathbb{D}$ des nombres décimaux est dense dans $\mathbb{R}$.
4. $\mathbb{Q}$ est-il dense dans $\mathbb{R}$? Justifier.

Exercice 6 (Densité de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$)

1. Soient a et b deux rationnels tels que $a < b$. Montrer qu'il existe un entier n tel que
$$a < a + \frac{\sqrt{2}}{n} < b.$$
2. Montrer que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 7

Soient $E = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } \exists p, q \in \mathbb{Z}, x = p + q\sqrt{2}\}$ et $u = \sqrt{2} - 1$.

1. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$ et pour tout $v \in E$, on a $nv \in E$.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u^n \in E$.
3. Montrer que $0 < u < 1/2$ et en déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $0 < u^n < 1/n$.
4. Soient a et b des nombres réels tels que $a < b$. Montrer qu'il existe un entier $n \geq 1$ tel que $0 < u^n < b - a$. En déduire qu'il existe un élément de E appartenant à l'intervalle $]\,a, b[$.
5. Montrer à l'aide de la question précedente que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.