Université Pierre et Marie Curie — Année 2012-2013
LM115 — Semestre 1

Analyse 2 - Suites et intégrales

Travaux Dirigés 4 - Suites (partie 1)

Exercice 1 (Question de cours)

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique. Écrire avec des quantificateurs les assertions suivantes :
   (a) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l \in \mathbb{R}$.
   (b) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.
2. Montrer qu'une suite convergente est bornée.
3. Donner un exemple de suite bornée et qui ne converge pas.

Exercice 2

Déterminer la monotonie des suites dont le terme général est :

1. $a_n = \frac{n!}{n^n}$
2. $b_n = \frac{1}{n^2+(-1)^n}$
3. $c_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

Exercice 3

Montrer en revenant à la définition quantifiée de la limite d'une suite que les suites dont le terme général est le suivant sont convergentes (et déterminer leur limite) :

1. $u_n = \frac{1}{n}$
2. $v_n = \frac{n}{n+1}$
3. $w_n = \frac{1}{n+(-1)^n\sqrt{n}}$

Exercice 4

Etudier les suites dont le terme général est :

1. $a_n = (-1)^n$
2. $b_n = \frac{3n-3}{2n+3}$
3. $c_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$
4. $d_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$
5. $e_n = \frac{E(nx)}{n}$, $x \in \mathbb{R}$
6. $f_{n+1} = rf_n$ avec $r \in \mathbb{R}^+$ et $f_0 = 1$

Exercice 5

On définit la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

En considérant $S_{2n} - S_n$, montrer que (S_n) diverge vers $+\infty$.

Exercice 6 (vrai ou faux)

On donnera une démonstration ou un contre-exemple à chacune des assertions ci-dessous.

1. Si une suite est positive et non majorée, elle admet pour limite $+\infty$.
2. Une suite à termes positifs qui tend vers 0 est décroissante à partir d'un certain rang.
3. Une suite qui diverge vers $+\infty$ est croissante à partir d'un certain rang.
4. Si une suite a une limite strictement positive, tous ses termes sont positifs à partir d'un certain rang.
5. Une suite non bornée est divergente.
6. Soient deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $(\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq v_n)$ et $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n - v_n) = 0$. Alors les deux suites convergent et ont même limite.
7. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante à termes réels telle que $(u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Exercice 7

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers le même réel l. Montrer que (u_n) converge vers l.

Exercice 8

Montrer qu'une suite convergente à valeurs dans $\mathbb{N}$ est stationnaire (c'est à dire constante à partir d'un certain rang).

Exercice 9

Montrer qu'une suite réelle divergeant vers $+\infty$ admet un plus petit élément.

Exercice 10

Montrer qu'une suite monotone dont une sous-suite converge est convergente.

Exercice 11

Soit f une application bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout entier naturel non nul n, on pose

$$M_n = \sup\{f(x), x \in [-1/n, 1/n]\} \qquad \text{et} \qquad m_n = \inf\{f(x), x \in [-1/n, 1/n]\}.$$

1. Prouver que ces deux suites sont monotones.
2. Sont-elles convergentes ?
3. Donner un exemple où elles n'ont pas même limite.

Exercice 12 (Théorème de Césaro)

On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est une suite réelle convergente de limite $l \in \mathbb{R}$. On va étudier la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ définie par

$$v_n = \frac{u_1 + \cdots + u_n}{n}.$$

1. Supposons $l = 0$. Montrer que (v_n) converge vers 0.
2. Plaçons-nous dans un cas plus général où $l \in \mathbb{R}$. Montrer que (v_n) converge vers l. Ce résultat est connu sous le nom de théorème de Césaro.
3. La réciproque de ce théorème est-elle vraie ? Justifier.

Exercice 13

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$ pour tout $n \geq 0$.

1. Montrer que cette suite est bien définie.
2. Montrer que (u_n) est croissante.
3. Montrer que (u_n) diverge vers $+\infty$.

Exercice 14

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$ pour tout $n \geq 0$.

1. Montrer que cette suite est bien définie.
2. Montrer que (u_n) est majorée et croissante.
3. Calculer la limite de (u_n).

Exercice 15

On définit deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ par
$a_1 = 1$, $b_1 = 2$, $b_n = \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}$ et $a_n b_n = 2$ pour tout entier n supérieur à 2.

1. Montrer que les suites réelles ainsi définies sont rationnelles.
2. Calculer les premiers termes de chacune d'entre elles ainsi que la différence $a_n - b_n$.
3. Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est à termes positifs, croissante et majorée par $\sqrt{2}$ et que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est décroissante et minorée par $\sqrt{2}$.
4. En déduire que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ convergent vers $\sqrt{2}$.