Université Pierre et Marie Curie
LM115

Année 2012-2013
Semestre 1

Analyse 2 - Suites et intégrales

Travaux Dirigés 5 - Suites (partie 2 - suites adjacentes, de Cauchy)

Exercice 1 (Question de cours)

1. Énoncer et démontrer le théorème des suites adjacentes.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. Écrire avec des quantificateurs que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.
3. Énoncer le critère de Cauchy.

Exercice 2

Construire une suite u de terme général $u_n = v_n \cdot w_n$ convergente et telle que l'une des deux suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit divergente. Même problème avec $u_n = v_n + w_n$.

Exercice 3

On définit deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$u_0 \leq v_0, \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{3u_n + v_n}{4}, \quad v_{n+1} = \frac{3v_n + u_n}{4}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1} \leq v_{n+1} \leq v_n$.
2. Montrer que $u_n - v_n$ converge géométriquement vers 0.
3. Montrer la convergence des deux suites.

Exercice 4 (Moyenne arithmetico-géométrique)

Soient a et b dans $\mathbb{R}^+$. On définit les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ par

$$a_0 = a, \quad b_0 = b, \quad \text{et} \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $a_n \leq b_n$, puis $a_n \leq a_{n+1}$ et $b_{n+1} \leq b_n$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|b_{n+1} - a_{n+1}| \leq |b_n - a_n|/2$.
3. Que dire des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Exercice 5 (Point fixe)

Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle qu'il existe $k \in]0,1[$, tel que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|.$$

1. Montrer que la suite récurrente définie par

$$u_0 \in \mathbb{R}, \quad u_{n+1} = f(u_n),$$

est une suite de Cauchy et converge vers l'unique point fixe de f.

2. Soit $f(x) = \sqrt{2-x}$ une fonction définie pour $x \in]0,2[$. Montrer que f est dérivable, puis que f' est décroissante sur $]0,2[$. Que vaut $f'(7/4)$? Donner un encadrement de f' sur $]0, \sqrt{2}]$.
3. Déduire de la question précédente qu'il existe $k < 1$ tel que pour tous $x, y \in]0, \sqrt{2}]$,

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|.$$

4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par

$$u_0 \in]0, \sqrt{2}], \quad u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n}.$$

Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie, et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0, \sqrt{2}]$, puis étudier la convergence de cette suite.

Exercice 6

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée à valeurs réelles. On pose

$$\limsup_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \sup\{u_k, k \geq n\},$$
$$\liminf_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \inf\{u_k, k \geq n\}.$$

1. Montrer que $\limsup_{n\to\infty} u_n$ et $\liminf_{n\to\infty} u_n$ sont toujours définis.
2. Montrer que si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une autre suite bornée, alors

$$\limsup_{n\to\infty}(u_n + v_n) \leq \limsup_{n\to\infty} u_n + \limsup_{n\to\infty} v_n.$$

3. Montrer que si $\limsup_{n\to\infty} u_n = \liminf_{n\to\infty} u_n$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Exercice 7

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ deux suites définies par :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad \text{et} v_n = u_n + \frac{1}{nn!}.$$

1. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ sont adjacentes. On note e leur limite commune.
2. montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$n!u_n < n!e < n!u_n + \frac{1}{n}.$$

3. En déduire (par l'absurde) que e est un nombre irrationnel.

Exercice 8

Soit (u_n) la suite définie par la donnée $u_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 1 + \frac{(n+2)u_n}{2(n+1)}.$$

1. Caculer u_1, u_2, u_3, u_4, u_5.
2. Montrer par récurrence que :

$$\forall n \geq 2,\ u_n \geq 2.$$

3. Montrer que la suite décroit pour $n \geq 5$.
4. En déduire que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.