Analyse 2 - Suites et intégrales

Travaux Dirigés 5 - suites partie 2

adresse mail : amandine.schreck@telecom-paristech.fr
page web : http ://perso.telecom-paristech.fr/∼schreck/

Suites adjacentes, suites de Cauchy

Exercice 1 (Question de cours)

1. Énoncer et démontrer le théorème des suites adjacentes.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. Écrire avec des quantificateurs que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.
3. Énoncer le critère de Cauchy.

Exercice 2

On définit deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$u_0 \leq v_0, \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{3u_n + v_n}{4}, \quad v_{n+1} = \frac{3v_n + u_n}{4}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1} \leq v_{n+1} \leq v_n$.
2. Montrer que $u_n - v_n$ converge géométriquement vers 0.
3. Montrer la convergence des deux suites.

Exercice 3 (Moyenne arithmetico-géométrique)

Soient a et b dans $\mathbb{R}^+$. On définit les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ par

$$a_0 = a, \quad b_0 = b, \quad \text{et} \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $a_n \leq b_n$, puis $a_n \leq a_{n+1}$ et $b_{n+1} \leq b_n$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|b_{n+1} - a_{n+1}| \leq |b_n - a_n|/2$.
3. Que dire des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Exercice 4 (Point fixe)

Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle qu'il existe $k \in]0,1[$, tel que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|.$$

1. Montrer que la suite récurrente définie par

$$u_0 \in \mathbb{R}, \quad u_{n+1} = f(u_n),$$

   est une suite de Cauchy et converge vers l'unique point fixe de f.

2. Soit $f(x) = \sqrt{2-x}$ une fonction définie pour $x \in]0,2[$. Montrer que f est dérivable, puis que f' est décroissante sur $]0,2[$. Que vaut $f'(7/4)$? Donner un encadrement de f' sur $]0,\sqrt{2}]$.
3. Déduire de la question précédente qu'il existe $k < 1$ tel que pour tous $x, y \in]0,\sqrt{2}]$,

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x-y|.$$

4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par

$$u_0 \in]0,\sqrt{2}], \quad u_{n+1} = \sqrt{2-u_n}.$$

Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie, et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0,\sqrt{2}]$, puis étudier la convergence de cette suite.

Exercice 5

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ deux suites définies par :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad \text{et} v_n = u_n + \frac{1}{nn!}.$$

1. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ sont adjacentes. On note e leur limite commune.
2. montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$n!u_n < n!e < n!u_n + \frac{1}{n}.$$

3. En déduire (par l'absurde) que e est un nombre irrationnel.

Exercice 6

On pose

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n} \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}.$$

Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

Exercice 7

On définit les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$, $v_0 = 2$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n).$$

1. Calculer u_1, v_1, u_2 et v_2.
2. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n et v_n existent, et $u_n < v_n$.
3. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, et que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
4. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < v_{n+1} - u_{n+1} < \frac{1}{2}(v_n - u_n)$. En déduire une majoration de $v_n - u_n$ en fonction de n.
5. En déduire que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
6. Que vaut $u_{n+1}v_{n+1}$? En déduire la limite commune de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
7. Déterminer un entier n_0 tel que u_{n_0} soit une valeur approchée de l à 10^{-3} près.

Suites récurrentes

Exercice 8 (Questions de cours)

1. Soit f une fonction décroissante et I un intervalle de $\mathbb{R}$ tels que $f(I) \subset I$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Que peut-on dire des suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$?
2. Le démontrer.

Exercice 9

Soit $f :]0, +\infty[\to]0, +\infty[$ la fonction définie par $f(x) = 1 + \frac{2}{x}$. On considère la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 = 1$.

1. Déterminer le sens de variation de f et montrer que l'intervalle $[1, 3]$ est stable par f. Que peut-on déduire pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
2. Soient $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$. Montrer que la suite (v_n) est croissante. (On pourra considérer la fonction $g = fof$.)
3. Démontrer que la suite (w_n) est décroissante.
4. En déduire que les suites (v_n) et (w_n) sont convergentes, et déterminer leur limite respective.
5. Quelle est la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Exercice 10

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$ pour tout $n \geq 0$.

1. Montrer que cette suite est bien définie.
2. Montrer que (u_n) est croissante.
3. Montrer que (u_n) diverge vers $+\infty$.

Exercice 11

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$ pour tout $n \geq 0$.

1. Montrer que cette suite est bien définie.
2. Montrer que (u_n) est croissante et majorée et calculer sa limite.

Exercice 12

On considère la fonction f définie sur $[0, 1]$ par $f(x) = x - x^2$, et on définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 \in]0, 1[$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Étudier les variations de f sur l'intervalle $]0, 1[$ et préciser son maximum sur cet intervalle. En déduire que la suite (u_n) est bien définie.
2. Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 0$, $0 < u_n < \frac{1}{1+n}$.
3. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $v_n = nu_n$ pour tout $n \geq 0$. Calculer $v_{n+1} - v_n$ en fonction de u_n. En déduire que la suite (v_n) est croissante.
4. Montrer que pour tout $n \geq 0$, $0 \leq v_n \leq \frac{n}{n+1}$. Qu'en déduisez-vous sur la suite (v_n) ?

Exercice 13

Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2 + 1$.

En plus

Exercice 14

On définit deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ par
$a_1 = 1$, $b_1 = 2$, $b_n = \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}$ et $a_n b_n = 2$ pour tout entier n supérieur à 2.

1. Montrer que les suites réelles ainsi définies sont rationnelles.
2. Calculer les premiers termes de chacune d'entre elles ainsi que la différence $a_n - b_n$.
3. Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est à termes positifs, croissante et majorée par $\sqrt{2}$ et que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est décroissante et minorée par $\sqrt{2}$.
4. En déduire que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ convergent vers $\sqrt{2}$.

Exercice 15

Pur $n > 2$, on définit la fonction g_n de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $g_n(x) = x^n + x^{n-1} + x^2 + x - 1$.

1. Étudier les variations de g_n sur $\mathbb{R}^+$, et montrer que l'équation $g_n(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}^+$.
2. On désigne par u_n cette racine. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est croissante et convergente.
3. On note l la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$. Montrer que $l \leq \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.
4. Que vaut l ? Justifier.