Université Pierre et Marie Curie | Année 2012-2013
LM115 | Semestre 1

Analyse 2 - Suites et intégrales

Travaux Dirigés 6 - Suites (partie 3 - suites récurrentes)

Exercice 1 (Questions de cours)

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. Écrire avec des quantificateurs que (u_n) est de Cauchy. Rappeler ce qu'est le critère de Cauchy pour les suites numériques et le prouver.
2. Soit f une fonction décroissante et I un intervalle de $\mathbb{R}$ tels que $f(I) \subset I$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Que peut-on dire des suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$? Le démontrer.

Exercice 2

Soit $f :]0, +\infty[\to]0, +\infty[$ la fonction définie par $f(x) = 1 + \frac{2}{x}$. On considère la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 = 1$.

1. Déterminer le sens de variation de f et montrer que l'intervalle $[1, 3]$ est stable par f. Que peut-on déduire pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
2. Soient $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$. Montrer que la suite (v_n) est croissante. (On pourra considérer la fonction $g = fof$.)
3. Démontrer que la suite (w_n) est décroissante.
4. En déduire que les suites (v_n) et (w_n) sont convergentes, et déterminer leur limite respective.
5. Quelle est la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Exercice 3

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$ pour tout $n \geq 0$.

1. Montrer que cette suite est bien définie.
2. Montrer que (u_n) est croissante.
3. Montrer que (u_n) diverge vers $+\infty$.

Exercice 4

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$ pour tout $n \geq 0$.

1. Montrer que cette suite est bien définie.
2. Montrer que (u_n) est croissante et majorée et calculer sa limite.

Exercice 5 (Fibonacci)

On cherche à résoudre le problème suivant :
Un homme met un couple de lapins venant de naître dans un lieu isolé de tous les côtés par un mur. Combien de couples obtient-on en un an si chaque couple engendre tous les mois un nouveau couple à compter du troisième mois de son existence ?

1. On note u_n le nombre de lapins présents dans la cage au bout du nième mois. On suppose que le temps de gestation est nul et qu'un couple de lapins né au mois n fera ses premiers bébés au mois $n+2$, au premier jour de son troisième mois d'existence. Donner la valeur de u_1, u_2, u_3 et u_4.
2. Pour tout $n \geq 1$, que vaut u_{n+2} en fonction de u_n et de u_{n+1} ?
3. Montrer que pour tout $n \geq 0$,
$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$
4. Combien y aura-t-il de lapins au bout d'un an ?

Exercice 6

On définit la fonction g_n de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $g_n(x) = x^n + x^{n-1} + x^2 + x - 1$.

1. Étudier les variations de g_n , et montrer que l'équation $g_n(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}^+$.
2. On désigne par u_n cette racine. Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$.
3. On note l la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$. Montrer que $l \leq \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.
4. Que vaut l ? Justifier.

Exercice 7

On considère la fonction f définie sur $[0,1]$ par $f(x) = x - x^2$, et on définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 \in]0,1[$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Étudier les variations de f sur l'intervalle $]0,1[$ et préciser son maximum sur cet intervalle. En déduire que la suite (u_n) est bien définie.
2. Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 0$, $0 < u_n < \frac{1}{1+n}$.
3. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $v_n = nu_n$ pour tout $n \geq 0$. Calculer $v_{n+1} - v_n$ en fonction de u_n. En déduire que la suite (v_n) est croissante.
4. Montrer que pour tout $n \geq 0$, $0 \leq v_n \leq \frac{n}{n+1}$. Qu'en déduisez-vous sur la suite (v_n) ?

Exercice 8

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. On suppose que
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to\infty}{\to} l.$$

1. Montrer que si $l < 1$, alors $u_n \to 0$.
2. Montrer que si $l > 1$, alors $u_n \to \infty$.
3. Montrer que dans le cas $l = 1$, on ne peut pas conclure.