Université Pierre et Marie Curie
LM115

Année 2012-2013
Semestre 2

Analyse 2 - Suites et intégrales

Travaux Dirigés 6 - fonctions

adresse mail : amandine.schreck@telecom-paristech.fr
page web : http ://perso.telecom-paristech.fr/∼schreck/

Limites, continuité en un point

Exercice 1 (Questions de cours)

1. Soient $x_0 \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ tel que $b > x_0$, et f une fonction définie sur $]x_0, b[$. Écrire avec des quantificateurs que f admet une limite à droite valant l en x_0.
2. Soient f une fonction définie sur un intervalle I et a un élément de I.
   (a) Écrire avec des quantificateurs que f est continue en a.
   (b) Écrire à l'aide de suites que f est continue en a.

Exercice 2

Soit f une fonction définie sur I, intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in I$. Traduire le fait que f est discontinue en a :

1. en terme de voisinages
2. avec les suites

Exercice 3

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que si f est continue en $a \in I$ alors f est bornée dans un voisinage de a.
2. Montrer que si f est continue en a et si $f(a) \neq 0$ alors f garde un signe constant dans un voisinage de a.

Exercice 4

Soient f et g deux applications définies sur un intervalle I et continues en un point $x_0 \in I$.

1. On suppose que $f(x_0) > g(x_0)$. Montrer qu'il existe un voisinage de x_0 sur lequel f est strictement plus grande que g.
2. L'énoncé est-il encore vrai si l'on remplace les inégalités strictes par des inégalités larges ? Justifier.

Exercice 5

Etudier les limites suivantes :

1. $\frac{x-1}{x^2-1}$ en 1.
2. $\frac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4}$ en 4.
3. $xE\left(\frac{1}{x}\right)$ en 0.
4. $\frac{x^3+x^2+5}{5x^3-x^2+2}$ en $+\infty$
5. $\frac{sin(x^2)}{x}$ en ∞ et en 0.
6. $\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ en 0.
7. $\frac{x-\sqrt{x}}{x+\ln(x)}$ en $+\infty$.
8. $\ln(x)\ln(\ln(x))$ en 1.

Exercice 6
Soit f une fonction continue en 0 telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = f(x).$$

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $f(x) = f(\frac{x}{2^k})$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
2. En déduire que $f(x) = f(0)$ pour tout x.

Exercice 7 (Équation fontionnelle)
Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant la relation :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) = f(x) + f(y).$$

1. Calculer $f(0)$ et montrer que f est impaire.
2. Calculer f sur $\mathbb{N}$, puis sur $\mathbb{Z}$ et enfin sur $\mathbb{Q}$ en fonction de $f(1)$.
3. On suppose que f est continue en 0. Montrer que les seules solutions de ce problème sont de la forme $f(x) = ax$ où $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 8
Déterminer l'ensemble des fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}$, continues en 0 et vérifiant :

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \quad f(x) + f(2x) = 0$$

Exercice 9
Peut-on prolonger $f : x \mapsto \sin \frac{1}{x}$ par continuité en 0 ?

Exercice 10
Les fonctions suivantes sont-elles prolongeables par continuité sur $\mathbb{R}$?

1. $\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \sin x \sin \frac{1}{x} \end{array}$
2. $\begin{array}{cccc} g & : & \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \frac{1}{x} \ln(\frac{e^x + e^{-x}}{2}) \end{array}$
3. $\begin{array}{cccc} h & : & \mathbb{R} \backslash \{-1, 1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \frac{1}{1-x} - \frac{2}{(1-x)^2} \end{array}$

Exercice 11
Déterminer a, b et c pour que les fonctions suivantes soient continues sur $\mathbb{R}$:

1. $f(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} 5 & \text{si} & x < -2 \\ ax + b & \text{si} & -2 \leq x < 1 \\ \ln x & \text{si} & x \geq 1 \end{array} \right.$
2. $g(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} (x-1)e^{2/x} & \text{si} & x < 0 \\ 3e^x - c & \text{si} & x \geq 0 \end{array} \right.$

Continuité

Exercice 12 (Questions de cours - continuité)

1. Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle fermé borné $[a, b]$, avec $a < b$ et $a, b \in \mathbb{R}$. L'ensemble $F = \{f(x), x \in [a, b]\}$ admet-il un maximum ? F admet-il un minimum ?
2. Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice 13

Soit f une fonction définie et continue sur $[0, +\infty[$, et telle que $f(0) = \lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Montrer que f admet un maximum.

Exercice 14

Étudier la continuité des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si} \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ 2. $f(x) = \mathrm{E}(x)$ 3. $f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{si} \quad x \in \mathbb{R}^* \\ 36 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$

Exercice 15

Soit f une fonction de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, avec $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et $a < b$.

1. On suppose f continue. Montrer que f est strictement monotone si et seulement si f est injective.
2. On suppose f croissante. Montrer que f est continue si et seulement si f est surjective de $[a, b]$ dans $[f(a), f(b)]$.

Exercice 16

Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$ telle que $f(0) = f(1)$. Soit g la fonction définie par

$$g(x) = \begin{cases} f(2x) & \text{si} \quad x \in [0, 1/2] \\ f(2x-1) & \text{si} \quad x \in]1/2, 1]. \end{cases}$$

Montrer que g est définie et continue sur $[0, 1]$.

Exercice 17

Soient a, b des réels avec $a < b$. Soit f une application continue de $[a, b]$ dans $[a, b]$. Montrer que f admet au moins un point fixe dans $[a, b]$.

Exercice 18

Un cycliste parcourt 20 km en une heure. Montrer qu'il existe un intervalle de temps d'une demi-heure lors duquel il parcourt exactement 10 km.

Exercice 19

Soit D une partie dense de $\mathbb{R}$.

1. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $f(x) = 0$ pour tout $x \in D$. Montrer que $f = 0$.
2. Soient $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues telle que $f(x) = g(x)$, pour tout $x \in D$. Montrer que $f = g$.

Exercice 20

Soient f et g deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ telle que $|f| = |g|$. On suppose que f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Montrer que $f = g$ ou $f = -g$.

Exercice 21

Soit f une fonction réelle, définie sur $\mathbb{R}$, continue en 0 et vérifiant

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) = f(x)f(y).$$

Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Rappels sur la dérivabilité

Exercice 22 (Questions de cours - dérivabilité)

1. Soient g une fonction définie sur un intervelle ouvert I, et $x_0 \in I$. Rappeler la définition de la dérivabilité de g en x_0.
2. Énoncer le théorème des accroissements finis.

Exercice 23

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on ait : $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^2$. Montrer que f est constante.

Exercice 24 (Théorème de Darboux)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction de I dans $\mathbb{R}$ dérivable sur I.

1. Soit $(a, b) \in I^2$ tel que $a < b$. On suppose que $f'(a) < 0$ et $f'(b) > 0$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.
2. En déduire que $f'(I)$ est un intervalle, i.e f' vérifie le théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice 25

Soit f une fonction réelle non nulle définie sur $\mathbb{R}_+$ dérivable en 1, telle que $f(xy) = f(x)f(y)$.

1. Démontrer que $f(1) = 1$
2. Soit $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et $h \in \mathbb{R}$ telle que $x_0 + h > 0$, démontrer que
$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f(x_0)[f(1 + \frac{h}{x_0}) - f(1)]$$
3. Démontrer que f est dérivable en tout point de R_+^* et que l'on a : $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{f'(1)}{x}$, pour tout $x > 0$.

Exercice 26

Soit f l'application définie sur son ensemble de définition $\mathcal{D}$ par $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{1+x}-1}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f.
2. Rappeler les développements limités à l'ordre 1 au voisinge de 0 de $x \mapsto \ln(1 + x)$ et $x \mapsto \sqrt{1 + x}$.
3. Montrer que f admet une limite en 0.
4. Existe-t-il un nombre réel l tel que l'application g définie sur $[0, +\infty[$ par $g(x) = f(x)$ pour $x > 0$ et $g(0) = l$ soit continue sur $[0, +\infty[$?