

Analyse 2 - Suites et intégrales

Travaux Dirigés 7 - Révisions et suites

Exercice 1 (Questions de cours)

1. Donner la négation de $P \Rightarrow Q$.
2. Donner une définition quantifiée de la borne inférieure d'une partie A de $\mathbb{R}$ minorée et non vide. Donner une définition en français.
3. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite et $l \in \mathbb{R}$. Écrire avec des quantificateurs :
 - (a) (u_n) converge vers l .
 - (b) (u_n) diverge vers $+\infty$.
4. Soit $r \in \mathbb{R}$ tel que $0 < r < 1$. Montrer que la suite $(r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

Exercice 2

Les ensembles suivants admettent-ils un majorant ? Une borne supérieure ? Un maximum ?

1. $A =]0, 1]$
2. $B =]0, 1[$
3. $C = \{2p + 1, p \in \mathbb{N}\}$

Exercice 3

Soient A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$. On note :

$$A + B = \{c \in \mathbb{R} \mid \exists (a, b) \in A \times B, c = a + b\}.$$

Montrer que $A + B$ admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$ et que $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.

Exercice 4

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites convergeant respectivement vers $l \in \mathbb{R}$ et $l' \in \mathbb{R}$ avec $l < l'$. Montrer qu'à partir d'un certain rang, $u_n < v_n$.

Exercice 5

On pose

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n} \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}.$$

Montrer que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes.

Exercice 6

Donner l'expression du terme général et la limite de la suite récurrente réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

1. $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + 1$.
2. $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n+1}{2}$.

Exercice 7

Étudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2 + 1$.

Exercice 8

On définit les suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$, $v_0 = 2$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{2u_nv_n}{u_n + v_n} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n).$$

1. Calculer u_1 , v_1 , u_2 et v_2 .
2. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n et v_n existent, et $u_n < v_n$.
3. Démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, et que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
4. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < v_{n+1} - u_{n+1} < \frac{1}{2}(v_n - u_n)$. En déduire une majoration de $v_n - u_n$ en fonction de n .
5. En déduire que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes.
6. Que vaut $u_{n+1}v_{n+1}$? En déduire la limite commune de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
7. Déterminer un entier n_0 tel que u_{n_0} soit une valeur approchée de l à 10^{-3} près.

Exercice 9

On définit deux suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par

$a_1 = 1$, $b_1 = 2$, $b_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$ et $a_n b_n = 2$ pour tout entier n supérieur à 2.

1. Montrer que les suites réelles ainsi définies sont rationnelles.
2. Calculer les premiers termes de chacune d'entre elles ainsi que la différence $a_n - b_n$.
3. Montrer que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est à termes positifs, croissante et majorée par $\sqrt{2}$ et que $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée par $\sqrt{2}$.
4. En déduire que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergent vers $\sqrt{2}$.