

Analyse 2 - Suites et intégrales

Travaux Dirigés 7 - intégrales

adresse mail : amandine.schreck@telecom-paristech.fr
page web : <http://perso.telecom-paristech.fr/~schreck/>

Intégrales de Riemann, primitives

Exercice 1 (Questions de cours)

1. Énoncer et démontrer la première formule de la moyenne pour les intégrales.
2. Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, où $a, b \in \mathbb{R}$, et soit $x_0 \in [a, b]$. Montrer que la fonction F_0 définie sur $[a, b]$ par

$$F_0(x) = \int_{x_0}^x f(t)dt$$

est dérivable sur $]a, b[$ avec $F'_0(x) = f(x)$.

Exercice 2

Soient a et b deux réels tels que $a < b$. calculer $\int_a^b E(x)dx$.

Exercice 3

Soit f une fonction réelle continue sur $\mathbb{R}$.

On définit g sur $\mathbb{R}$ par : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \int_0^x tf(t)dt$.

1. Montrer que g est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
3. Montrer que si f est une fonction paire alors g est également paire.

Exercice 4

Pour tout entier $n \geq 0$ on pose

$$u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx.$$

1. Justifier l'existence de u_n pour tout entier naturel n .
2. Montrer que $u_n > 0$ pour tout n .
3. Montrer que la suite (u_n) est décroissante et converge vers 0.

Exercice 5

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ et $M > 0$ tels que

$$f(a) = f(b) = 0, \quad \forall x \in [a, b], \quad |f'(x)| \leq M.$$

Montrer que

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{M(b-a)^2}{4}.$$

Exercice 6

Soit f une fonction continue et positive sur $[a, b]$, démontrer que

$$\int_a^b f(x) dx = 0 \iff \forall x \in [a, b], f(x) = 0$$

Exercice 7

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ telle que pour toute fonction g continue sur $[a, b]$ on ait

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0.$$

Montrer que f est nulle sur $[a, b]$.

Exercice 8

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{2}.$$

Montrer qu'il existe $\alpha \in]0, 1[$ tel que $f(\alpha) = \alpha$. On pourra introduire la fonction $G(x) = \int_0^x f(t)dt - \frac{x^2}{2}$.

Exercice 9

Soit la suite (u_n) définie par

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n(n+k)}}.$$

Montrer que (u_n) converge et calculer sa limite.

Même chose avec la suite (v_n) définie par

$$v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$$

Exercice 10

Trouver l'ensemble des fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ telles que

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| = \int_a^b |f(x)| dx.$$

Exercice 11

On pose pour tout entier naturel n , $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x) dx$.

1. Démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée.
2. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (on pourra, pour tout $\epsilon \in]0, \pi[$, découper l'intégrale en deux en introduisant $\frac{\pi}{2} - \frac{\epsilon}{2}$).

Exercice 12

En les comparant à des intégrales bien choisies, étudier les suites

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}.$$

Exercice 13

En utilisant la formule de la moyenne, calculer la limite lorsque x tend vers 0 à droite de $\int_x^{x^2} \frac{e^{-1/t}}{t} dt$.

Exercice 14 (Annale)

Pour tout réel $x > 0$ on considère l'intégrale :

$$I(x) = \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{2x}} \ln(t^2) dt.$$

1. Montrer que I est bien définie.
2. On fixe un réel $x > 0$. Donner un majorant et un minorant dépendant de x de la fonction $t \mapsto \ln(t^2)$ sur l'intervalle $[\sqrt{x}, \sqrt{2x}]$.
3. Quelle est la limite de $\sqrt{x} \ln(x)$ lorsque x tend vers 0 ?
4. Montrer que l'application $I :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ admet une limite à droite en zéro que l'on déterminera.

Calcul de primitives**Exercice 15** (Questions de cours)

1. Énoncer et démontrer le théorème d'intégration par partie.
2. Énoncer le théorème de changement de variable.

Exercice 16

1. Montrer que si f est une fonction continue, de signe constant, et d'intégrale nulle sur $[a, b]$, alors f est nulle sur $[a, b]$.
2. Soit f une fonction continue et non identiquement nulle sur $[a, b]$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $\int_a^b t^k f(t) dt = 0$ pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$, alors f s'annule en changeant de signe en au moins $n + 1$ points.

Exercice 17

Soit f une fonction de classe C^1 , démontrer que la suite définie par $u_n = \int_a^b f(t) \sin(nt) dt$ tend vers 0 quand n tend vers ∞

Exercice 18

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, montrer que $H(x) = \int_1^x \frac{3t+1}{t(t+1)^2} dt$ est bien définie.
2. Montrer qu'il existe trois nombres réels a , b et c que l'on calculera tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\} \quad \frac{3x+1}{x(x+1)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2}$$

3. Calculer $H(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$

4. Montrer que H admet une limite en $+\infty$ que l'on déterminera.

Exercice 19 (Calculs d'intégrales)

Calculer les intégrales suivantes, après avoir justifié leur existence :

1. $\int_0^\pi \frac{\sin(t)}{1+\cos^2(t)} dt$

3. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} dt$

5. $\int_0^1 \frac{1}{e^t+1} dt$

2. $\int_0^1 \frac{1}{t^2+2} dt$

4. $\int_0^4 \sqrt{t}(t-2\sqrt{t}) dt$

6. $\int_0^1 \frac{dt}{t^3+1}$

Exercice 20

Calculer les primitives des fonctions suivantes en précisant les intervalles sur lesquels cela est possible :

1. $f(x) = \tan(x)$

3. $h(x) = (x^2 + x + 1)e^x$

5. $l(x) = \frac{x+3}{x^2-3x-40}$

2. $g(x) = \frac{x^2}{x^2+x-2}$

4. $k(x) = \frac{x^3-x^2-3x+4}{x^2-2x+1}$

6. $m(x) = \frac{10x^2+12x+20}{x^3-8}$

Exercice 21 (Annale)

L'objectif est de donner une valeur de

$$I = \int_0^{1/2} \frac{e^{-t}}{1-t} dt.$$

1. Justifier l'existence de I .

2. Calculer l'intégrale $J = \int_0^{1/2} e^{-t}(1+t) dt$.

3. (a) Montrer que, pour tout $t \neq 1$, $\frac{1}{1-t} = 1 + t + \frac{t^2}{1-t}$.

(b) Montrer que pour tout $t \in [0, 1/2]$, on a : $\frac{t^2}{\sqrt{e}} \leq \frac{e^{-t}}{1-t} - e^{-t}(1+t) \leq 2t^2$.

(c) En déduire un encadrement de I .

Exercice 22 (Annale)

Pour tout réel $x \neq 1$, on considère le réels

$$f(x) = \frac{4x^2 + 2x + 3}{(x+1)(4x^2+1)}.$$

1. Montrer que f ainsi définie est une application intégrable au sens de Riemann sur $[0, 1]$.

2. Trouver trois réels a , b et c tels que pour tout réel $x \in [0, 1]$,

$$f(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{4x^2+1}.$$

3. Calculer l'intégrale de f entre 0 et 1.

Exercice 23 (Annale)

On considère la suite (w_n) donnée pour tout entier naturel n par

$$w_n = \int_0^1 \frac{\ln(1+x^n)}{(1+x)(2-x)} dx.$$

1. Trouver deux réels a et b tels que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}, \quad \frac{1}{(1+x)(2-x)} = \frac{a}{1+x} + \frac{b}{2-x}.$$

2. Calculer w_0 .
3. Montrer que la suite (w_n) est décroissante et positive.
4. Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$, $\ln(1+x) \leq x$.
5. Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$,

$$\frac{\ln(1+x^n)}{(1+x)(2-x)} \leq x^n,$$

et en déduire une majoration de w_n .

6. Montrer que (w_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 24 (Annale)

Soit $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue.

1. Citer un théorème du cours montrant que g est bornée sur $[0, 1]$.
2. Pour tout entier naturel n , justifier l'existence de

$$I_n = \int_0^1 e^{-nx} g(x) dx.$$

3. Calculer I_0 dans le cas particulier où $g(x) = xe^{-x}$.
4. Soit M un majorant de $|g|$ sur $[0, 1]$. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $|I_n| \leq \frac{M}{n}$.
5. En déduire que (I_n) converge et préciser sa limite.
6. On suppose maintenant que g est dérivable à dérivée continue sur $[0, 1]$ et vérifie $g(0) = 1$. Soit J_n défini pour $n \geq 1$ par

$$J_n = n \int_0^1 e^{-nx} g(x) dx.$$

À l'aide d'une intégration par partie, montrer que la suite (J_n) est convergente. Préciser sa limite.

Exercice 25

L'objectif est de calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}, \quad J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}} dx, \quad K = \int_0^1 \sqrt{x^2+2} dx$$

1. Soit f la fonction définie sur $[0, 1]$ par $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+2})$. Calculer sa dérivée, en déduire I .
2. Calcul de J et de K .
 - (a) Montrer que $J + 2I = K$.
 - (b) À l'aide d'une intégration par parties portant sur K , montrer que $K = \sqrt{3} - J$.
 - (c) En déduire les valeurs de J et de K .

Exercice 26

1. Démontrer la formule trigonométrique suivante, puis déterminer une primitive de $\sin^2$.

$$\sin^2(t) = \frac{1 - \cos(2t)}{2}.$$

2. Soit $a > 0$, on cherche à calculer $I = \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx$.

En effectuant le changement de variable défini par $x = a \cos(t)$ pour $t \in [0, \pi/2]$, montrer que

$$I = a^2 \int_0^{\pi/2} \sin^2(t) dt.$$

Justifier bien le changement de variable (attention aux bornes).

3. Déterminer la valeur de I .

Exercice 27 (Intégrales de Wallis)

Pour tout entier $n \geq 0$ on pose

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) dt$$

1. Calculer W_0, W_1, W_2 et W_3 .
2. Soit n un entier. En utilisant une intégration par parties montrer que

$$W_{n+2} = (n+1)(W_n - W_{n+2})$$

et exprimer W_{n+2} en fonction de W_n .

3. Calculer W_{2k} et W_{2k+1} en fonction de $k \in \mathbb{N}$.
4. Montrer que (W_n) est décroissante et strictement positive.
5. En exploitant l'inégalité $W_{n+1} \leq W_n \leq W_{n-1}$, montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{W_n}{W_{n+1}} = 1$$

6. On pose $u_n = nW_nW_{n+1}$. Montrer par récurrence que pour tout n on a $u_n = \frac{n}{n+1} \frac{\pi}{2}$.
7. En conclure un équivalent simple de (W_n) . [On appelle équivalent d'une suite (u_n) une suite (α_n) telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{\alpha_n} = 1$]

Exercice 28

Calculer les intégrales suivantes à l'aide de l'intégration par parties

1. $\int_0^1 \arctan(t) dt$
2. $\int_0^1 x \cos(x) dx$
3. $\int_1^x t^n \ln(t) dt$ où $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$
4. $\int_0^1 \frac{u}{\sqrt{1+u}} du$.

Exercice 29

Calculer, à l'aide d'un ou plusieurs changements variables, les intégrales suivantes :

1. $I_1 = \int_e^x \frac{dt}{t \ln^2(t)}$ où x est un réel, $x > e$
2. $I_2 = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} \frac{t^2}{1-t^3} dt$ (on posera $u = \frac{1}{t}$).
3. $I_3 = \int_2^3 \ln(t^{\frac{1}{3}} - 1) dt$ (on posera $u = t^{\frac{1}{3}}$).
4. $I_4 = \int_1^x \frac{dt}{t\sqrt{1+t}}$ où x est un réel, $x > 1$ (on posera $u = \sqrt{1+t}$).