

Feuille 2 : dérivabilité, théorème de Rolle et des accroissements finis, étude des variations

Les exercices sans (*) sont des applications directes du cours. Les exercices marqués (*) sont un peu plus difficiles, mais quelques exercices de ce genre pourront aussi figurer dans les évaluations. Enfin, quelques exercices marqués (**) peuvent être considérés comme des « compléments de cours » mais certains peuvent aussi être traités comme apportant un autre éclairage sur des notions vues en cours ou des exercices précédents. Toutefois, les évaluations ne comporteront pas d'exercices du type (**).

Exercice 1. Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer l'ensemble où elle est dérivable et calculer sa dérivée :
 1. $f_1 : x \mapsto \log(x^2 - 3x + 2)$ 2. $f_2 : x \mapsto \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ 3. $f_3 : x \mapsto e^{1/x}$

Exercice 2. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on ait : $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^2$. Montrer que f est constante.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et dérivable en 0, et telle que $f(0) = 0$. Montrer que la fonction g définie pour $x > 0$ par $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ peut se prolonger par continuité en 0. Que se passe-t-il si $f(0) \neq 0$?

Exercice 4. (Théorème de Darboux). Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction de I dans $\mathbb{R}$ dérivable sur I .

1. Soit $(a, b) \in I^2$ tel que $a < b$. On suppose que $f'(a) < 0$ et $f'(b) > 0$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.
2. En déduire que $f'(I)$ est un intervalle, i.e f' vérifie le théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice 5. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(x) - x + \frac{x^3}{6}$.

1. Calculer f' , f'' et f''' .
2. Montrer que pour tout $x \geq 0$, on a : $f'''(x) \geq 0$, $f''(x) \geq 0$ et $f'(x) \geq 0$.
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos(x) \leq 1$ et $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x$.

Exercice 6. Soit f une fonction réelle non nulle définie sur $\mathbb{R}_+$ dérivable en 1, telle que $f(xy) = f(x)f(y)$.

1. Démontrer que $f(1) = 1$
2. Soit $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et $h \in \mathbb{R}$ telle que $x_0 + h > 0$, démontrer que $f(x_0 + h) - f(x_0) = f(x_0)[f(1 + \frac{h}{x_0}) - f(1)]$.
3. Démontrer que f est dérivable en tout point de $\mathbb{R}_+^*$ et que l'on a : $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{f'(1)}{1}$, pour tout $x > 0$.

Exercice 7. On dispose d'une plaque de carton carrée, de côté de longueur L . On découpe dans chaque coin un carré de côté x , obtenant ainsi une forme de croix, puis on plie vers le haut chacun des quatre côtés, afin d'obtenir une boîte sans couvercle.

1. Exprimer en fonction de L et x le volume $V(x)$ de la boîte.
2. Sans développer $V(x)$ et en utilisant des formules connues pour la dérivée d'un produit ou d'une composée de fonctions, déterminer pour quelle valeur de x ce volume est maximal.

Exercice 8 ($\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x)/x = 1$ et dérivabilité de $\sin$ et $\cos$). Dessiner un cercle trigonométrique de centre O et de rayon 1, placer le point I correspondant à l'angle $\theta = 0$ et placer un point M correspondant à un angle $x \in]0, \pi/2[$ fixé (en particulier $x > 0$). Soit H le point d'intersection de la droite (OM) avec la tangente au cercle au point I . Comme x est la longueur de l'arc de cercle $\widehat{IM}$ et comme le plus court chemin entre I et M est le segment $[I, M]$, on sait (ou l'on admet) que $x \geq IM$ (on note IM la longueur du segment $[I, M]$).

1. Déterminer IM^2 puis IM , puis montrer que $0 < \sin(x) < IM < x$.
2. Montrer que la longueur IH vaut $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$. Déterminer alors la surface du triangle OHI .

On admet que la surface de la portion de disque (« part de gâteau » si on veut) déterminée par OI et OM est $(x/2\pi) \times \pi = x/2$.

3. En déduire que $\sin(x) < x < \tan(x)$.
4. Déduire de ce qui précède que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sin(x)} = 1$.
5. En utilisant que la fonction $\sin$ est *impaire*, montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin(x)} = 1$.
6. Montrer que la fonction $\sin$ est dérivable en 0 et déterminer $\sin'(0)$.
7. Reprenant la valeur de IM^2 , montrer que $0 < \frac{1 - \cos(x)}{x} < \frac{x}{2}$.
8. Montrer que la fonction $\cos$ est dérivable en 0 et déterminer $\cos'(0)$.
9. Écrire les formules trigonométriques $\sin(a + h) = \dots$ et $\cos(a + h) = \dots$ puis, en utilisant les questions précédentes, montrer que $\sin$ (resp. $\cos$) est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $\cos$ (resp. $-\sin$).
10. (Optionnel) Déduire le calcul de $\cos'(0)$ de la formule $1 - \cos(x) = \dots$ et de la question 5.
11. Déterminer le domaine de définition D de la fonction $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$, calculer sa dérivée et montrer que $\tan'(x) = 1 + \tan(x)^2$. Montrer aussi que $\tan(x + \pi) = \tan(x)$ pour tout $x \in D$. Étudier les variations et dessiner le graphe de la fonction $]-\pi/2, \pi/2[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \tan(x)$.

Exercice 9 (Dérivée de $x \mapsto \sqrt[n]{x} = x^{1/n}$). Soit n un entier ≥ 2 .

1. Montrer que la fonction $f(x) = \sqrt{x}$ est dérivable en tout point de $\mathbb{R}_+^*$ et déterminer la fonction dérivée f' . Montrer aussi que f n'est pas dérivable à droite en 0.
2. Montrer que $y^n - b^n = (y - b)(y^{n-1} + y^{n-2}b + \dots + yb^{n-2} + b^{n-1})$, pour tout $b, y \in \mathbb{R}$.
3. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. En utilisant l'égalité précédente pour b et y bien choisis, montrer que la fonction $f(x) = \sqrt[n]{x}$ est dérivable en tout point de $\mathbb{R}_+^*$ et déterminer la fonction dérivée f' . Montrer aussi que f n'est pas dérivable à droite en 0.

Exercice 10. On considère la fonction $f : x \mapsto x^4$. Les phrases sont-elles vraies ou fausses ?

- | | |
|--|--|
| 1. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q}$ est une application surjective. | 5. $f : [-1, 1] \rightarrow [0, 1]$ est bijective. |
| 2. $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ est une application surjective. | 6. $f : [0, 2] \rightarrow [0, 2]$ est bijective. |
| 3. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une application injective. | 7. $f : [0, 1] \rightarrow [0, 2]$ est bijective. |
| 4. $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ est une application injective. | 8. $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ est bijective. |

Exercice 11. Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux applications. Démontrer les propriétés suivantes :

1. $g \circ f$ est injective $\Rightarrow f$ est injective.
2. $g \circ f$ est surjective $\Rightarrow g$ est surjective.

Montrer par des exemples que les réciproques sont fausses.

Exercice 12 (Applications $I \rightarrow \mathbb{R}$ continues et injectives). (*) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, non vide et non réduit à un point, et soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue et *injective* (i.e. $f(x) \neq f(x')$ si $x \neq x'$). Le but de l'exercice est de montrer que f est ou bien strictement croissante ou bien strictement décroissante. Soient $x_0 < x_1 < x_2$ dans I et supposons par exemple que $f(x_1) < f(x_2)$. On considère les intervalles $I_+^* = I \cap]x_1, +\infty[$ et $I_-^* = I \cap]-\infty, x_1[$.

1. En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, montrer $f(x) - f(x_1) > 0$ pour tout $x \in I_+^*$.
2. En déduire que $f([x_1, x_2]) = [f(x_1), f(x_2)]$.

Pour montrer que $f(x_0) < f(x_1)$ on va raisonner par l'absurde. Supposons donc que $f(x_0) > f(x_1)$.

3. Montrer alors, en procédant comme précédemment, que $f([x_0, x_1]) = [f(x_1), f(x_0)]$.
4. En déduire que f n'est pas injective. Indication : considérer par exemple $m = \min(f(x_0), f(x_2))$.
5. Déduire de la contradiction précédente que f est strictement croissante.

Exercice 13 (Théorème de Rolle et polynômes). On dit qu'un polynôme $Q(x)$ est de *degré* $d \in \mathbb{N}$ s'il s'écrit $Q(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_dx^d$ avec $b_d \neq 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère une fonction polynomiale P de degré n , disons $P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$.

1. Citer des résultats qui assurent que P est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée $P'(x)$.

2. En utilisant le théorème de Rolle, montrer par récurrence sur n que l'équation $P(x) = 0$ a au plus n solutions dans $\mathbb{R}$.

Exercice 14 (Règle de L'Hôpital et applications). Soit I un intervalle ouvert $\neq \emptyset$ et $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux applications dérivables sur I . On suppose de plus que $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$.

- Fixons $a < b$ dans I . Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$. Indication : considérer sur $[a, b]$ l'application $\varphi(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x)$.
- (*) Fixons $a \in I$. Dédurre de la question précédente que si $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe et vaut $\ell \in \mathbb{R}$, alors

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \ell.$$

On rappelle (cf. Exo 8) que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ et que la fonction $\sin$ (resp. $\cos$) est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $\cos$ (resp. $-\sin$).

3. En utilisant la question 2, déterminer $a_2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x^2}$, puis $a_3 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x}{x^3}$, puis

$$a_4 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1 - a_2 x^2}{x^4} \quad \text{et} \quad a_5 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x - a_3 x^3}{x^5}.$$

4. (**) Pouvez-vous définir et deviner la valeur de a_6, a_7 , etc. ?

Exercice 15 (Dérivées de Arcsin, Arccos, Arctan). 1. Montrer que l'application $[-\pi/2, \pi/2] \rightarrow [-1, 1], x \mapsto \sin(x)$ est bijective. On note Arcsin l'application réciproque. Calculer $\text{Arcsin}'(x)$ pour tout $x \in [-1, 1]$ (étant entendu qu'il s'agit d'une dérivée à droite si $x = -1$, et à gauche si $x = 1$).

2. Montrer que l'application $[0, \pi] \rightarrow [-1, 1], x \mapsto \cos(x)$ est bijective. On note Arccos l'application réciproque. Calculer $\text{Arccos}'(x)$ pour tout $x \in [-1, 1]$ (étant entendu qu'il s'agit d'une dérivée à droite si $x = -1$, et à gauche si $x = 1$).

3. Montrer que pour tout $x \in [-1, 1]$ on a $\text{Arcsin}(x) + \text{Arccos}(x) = \frac{\pi}{2}$.

4. Montrer que l'application $]-\pi/2, \pi/2[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ est bijective. On note Arctan l'application réciproque. Calculer $\text{Arctan}'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 16 (Dérivée de $\ln|f(x)|$). Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application dérivable sur I et telle que $f(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$.

1. Montrer que f garde un signe constant (> 0 ou bien < 0) sur I .

On rappelle que la fonction logarithme népérien $\ln : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivée $x \mapsto 1/x$.

2. Montrer que la fonction $x \mapsto \ln(|f(x)|)$ est dérivable sur I , de dérivée $f'(x)/f(x)$.

Exercice 17 (Fonctions sh, ch, th, Argsh, Argch, Argth). Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$\text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \text{th}(x) = \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}.$$

Remarquons que $\boxed{\text{ch}(x)^2 - \text{sh}(x)^2 = 1}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

- Montrer que sh, ch et th sont dérivables sur $\mathbb{R}$, étudier leurs variations et dessiner leurs graphes.
- Montrer que l'application $\text{sh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est bijective. On note Argsh : $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application réciproque. Calculer $\text{Argsh}'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- Montrer que l'application $\text{ch} : \mathbb{R}_+ \rightarrow [1, +\infty[$ est bijective. On note Argch : $[1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+$ l'application réciproque. Calculer $\text{Argch}'(x)$ pour tout $x \in]1, +\infty[$. Montrer d'autre part que Argch n'est pas dérivable à droite en 1.
- Calculer la dérivée de la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ puis montrer que $f = \text{Argsh}$.

5. Soit $g :]1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+$, $x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$. Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in]1, +\infty[$, puis montrer que g coïncide avec Argch sur $]1, +\infty[$ et aussi en 1.
6. Montrer que l'application $\operatorname{th} : \mathbb{R} \rightarrow]-1, 1[$ est bijective. On note $\operatorname{Argth} :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ l'application réciproque. Calculer $\operatorname{Argth}'(x)$ pour tout $x \in]-1, 1[$.
7. Soit $h :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \frac{1}{2}(\ln(1+x) - \ln(1-x))$. Calculer $h'(x)$ pour tout $x \in]-1, 1[$, puis montrer que $h = \operatorname{Argth}$.

Exercice 18 (Moyennes arithmétique et géométrique). 1. Pour $a_1, a_2 \in \mathbb{R}_+^*$, montrer que $\frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2}$, avec égalité si et seulement si $a_1 = a_2$. (Considérer $a_1 + a_2 - 2\sqrt{a_1 a_2}$.)

2. Montrer par récurrence sur l'entier $n \geq 2$ que, pour tous $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}_+^*$ on a, en notant $(a_1 \cdots a_n)^{1/n} = \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}$, l'inégalité : $\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \geq (a_1 \cdots a_n)^{1/n}$, avec égalité si et seulement si $a_1 = \cdots = a_n$. Indication : supposant le résultat établi pour n , on pourra étudier la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{a_1 + \cdots + a_n + x}{n+1} - (a_1 \cdots a_n x)^{1/(n+1)}$.

Exercice 19 (Fonctions dérivables convexes ou concaves). Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$, et soit f une application $I \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est *convexe* (resp. *strictement convexe*) si elle vérifie la condition suivante :

$$(\cup) \quad \forall a < b < c \text{ dans } I, \quad \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(c) - f(a)}{c - a} \quad \text{resp.} \quad \frac{f(b) - f(a)}{b - a} < \frac{f(c) - f(a)}{c - a}$$

L'explication géométrique est la suivante : f est (strictement) convexe si pour tout $a < c$ dans I , la partie du graphe de f au-dessus du segment $]a, c[$ est (strictement) *en-dessous* de la droite joignant les points $(a, f(a))$ et $(c, f(c))$. Or, l'équation de cette droite est $y - f(a) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a}(x - a)$, i.e. $y = f(a) + \frac{f(c) - f(a)}{c - a}(x - a)$. Donc la condition requise est que

$$(\star) \quad \forall b \in]a, c[, \quad f(b) \leq f(a) + \frac{f(c) - f(a)}{c - a}(b - a) \quad \text{resp.} \quad f(b) < f(a) + \frac{f(c) - f(a)}{c - a}(b - a)$$

ce qui équivaut à la condition $(\cup)$ plus haut.

De plus, on dit que f est (strictement) *concave* si $-f$ est (strictement) convexe, c.-à.-d. si f vérifie la condition suivante :

$$(\cap) \quad \forall a < b < c \text{ dans } I, \quad \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \geq \frac{f(c) - f(a)}{c - a} \quad \text{resp.} \quad \frac{f(b) - f(a)}{b - a} > \frac{f(c) - f(a)}{c - a}$$

1. Montrer que $(\cup)$ est équivalente à l'inégalité $(\cup')$ ci-dessous :

$$\forall a < b < c \text{ dans } I, (f(b) - f(a))(c - b) \leq (f(c) - f(b))(b - a), \text{ resp. } (f(b) - f(a))(c - b) < (f(c) - f(b))(b - a)$$

et que celle-ci est équivalente à :

$$(\dagger) \quad \forall a < b < c \text{ dans } I, \quad \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(c) - f(b)}{c - b} \quad \text{resp.} \quad \frac{f(b) - f(a)}{b - a} < \frac{f(c) - f(b)}{c - b}$$

Indication : écrire $(\dagger)$ sous une forme $(\dagger')$ analogue à $(\cup')$, puis ajouter une même quantité aux deux membres de $(\dagger')$ pour obtenir $(\cup')$.

2. On suppose que f est dérivable sur I et que f' est croissante (resp. strictement croissante) sur I . Soient $a < b < c$ dans I . En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, montrer alors que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq f'(b) \leq \frac{f(c) - f(b)}{c - b} \quad \text{resp.} \quad \frac{f(b) - f(a)}{b - a} < f'(b) < \frac{f(c) - f(b)}{c - b}$$

et en déduire que f est convexe (resp. strictement convexe).

Fixons $x_1 \leq x_2$ dans I . Alors les éléments du segment $[x_1, x_2]$ sont exactement les réels $x_1 + \mu(x_2 - x_1) = (1 - \mu)x_1 + \mu x_2$, pour μ variant dans $[0, 1]$, ce qu'on peut aussi écrire :

$$[x_1, x_2] = \{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \mid \lambda_1, \lambda_2 \in [0, 1], \lambda_1 + \lambda_2 = 1\}.$$

De plus, si $b = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = x_1 + \lambda_2(x_2 - x_1)$, alors $\lambda_2 = \frac{b - x_1}{x_2 - x_1}$ et la condition $(\star)$ donne alors que f est convexe (resp. strictement convexe) si et seulement si, pour tous $x_1 \leq x_2$ dans I et $\lambda_1, \lambda_2 \in]0, 1[$ tels que $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, on a :

$$(\star_2) \quad f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) \quad (\text{resp. } < \text{ si } x_1 \neq x_2).$$

On suppose désormais que $(\star_2)$ est vérifié.

3. $(**)$ Montrer par récurrence sur l'entier $n \geq 2$ que : pour tous $x_1 \leq \dots \leq x_n$ dans I et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0, 1]$ tels que $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$, on a, en notant $A = \{i \in \{1, \dots, n\} \mid \lambda_i \neq 0\}$,

$$(\star_n) \quad \begin{cases} \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n \in I \\ f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n) \\ \text{si } f \text{ est strictement convexe, l'inégalité est stricte sauf si } x_i = x_j \text{ pour } i, j \in A. \end{cases}$$

Indication. Soit $n > 2$ et supposons $(\star_k)$ vraie pour $k = 2, \dots, n-1$. Pour passer de $n-1$ à n , on peut supposer que tous les λ_i sont > 0 , et donc aussi < 1 . Posant alors $x = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_n} x_i$, on a $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = (1 - \lambda_n)x + \lambda_n x_n$. Utiliser alors que $(\star_2)$ et $(\star_{n-1})$ sont vraies.

4. Montrer que la fonction $\ln : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ est strictement concave. En déduire que pour tous $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$\ln\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right) \geq \frac{\ln(x_1) + \dots + \ln(x_n)}{n}$$

avec égalité si et seulement si $x_1 = \dots = x_n$. Puis, en utilisant que la fonction $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est strictement croissante, en déduire que :

$$\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \geq (x_1 \cdots x_n)^{1/n} \quad \text{pour tous } x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+^*,$$

avec égalité si et seulement si $x_1 = \dots = x_n$.