Feuille 3 : Théorèmes de Rolle et des accroissements finis, développements limités

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable. On suppose que f' ne s'annule pas. Montrer que f ne peut pas être périodique.

Exercice 2. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$.Montrer qu'il existe $x \in]0, 1[$ tel que

$$4ax^3 + 3bx^2 + 2cx = a + b + c.$$

Exercice 3. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et vérifiant $f(a) = f'(a)$ et $f(b) = f'(b)$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = f''(c)$.
Indice : on pourra introduire une fonction auxilliaire dépendant de $f(x)$, $f'(x)$ et $\exp(x)$

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Montrer que

$$\forall x > 0, \quad \exists c > 0, \quad f(x) - f(-x) = x(f'(c) + f'(-c)).$$

Exercice 5. À l'aide du théorème des accroissements finis, déterminer

$$\lim_{x\to+\infty} \left((x + 1) \exp\left(\frac{1}{x + 1}\right) - x \exp\left(\frac{1}{x}\right) \right).$$

Exercice 6. Soit f l'application définie sur son ensemble de définition $\mathcal{D}$ par $f(x) = \dfrac{\ln(1 + x)}{\sqrt{1 + x} - 1}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f.
2. Rappeler les développements limités à l'ordre 1 au voisinge de 0 de $x \mapsto \ln(1 + x)$ et $x \mapsto \sqrt{1 + x}$.
3. Montrer que f admet une limite en 0.
4. Existe-t-il un nombre réel l tel que l'application g définie sur $[0, +\infty[$ par $g(x) = f(x)$ pour $x > 0$ et $g(0) = l$ soit continue sur $[0, +\infty[$?

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} \cosh(\sqrt{x}) \text{ si } x \geq 0 \\ \cos(\sqrt{-x}) \text{ si } x < 0 \end{cases}$

1. Ecrire les développements limités à l'ordre 4 de $\cos(x)$ et $\cosh(x)$ au point 0.
2. Montrer que f est de classe C^1 et possède un développement limité d'ordre 2 en 0 puis le calculer.

Exercice 8. Calculer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to0} \left(\frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{x^2}\right)$
2. $\displaystyle\lim_{x\to0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1 + x)}\right)$
3. $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2}$ et en déduire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{x^2}$
4. $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{(1 + x)^{1/x} - e}{x}$
5. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x}{x + 1}\right)$
6. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt{1 + x} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$

Exercice 9. Calculer :

1. le développement limité à l'ordre 5 en 0 de arctan,
2. le développement limité à l'ordre 3 en 1 de arctan,
3. le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $\ln(1 + e^x)$,
4. le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $\dfrac{x - \sin(x)}{1 - \cos(x)}$.

Exercice 10. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^x(\sin x + \cos x) - 1$

1. Calculer $f'(x), f''(x)$ et $f'''(x)$.
2. Montrer, en utilisant la formule de Taylor-Lagrange pour f entre 0 et un point x de $\mathbb{R}$, que, pour tout $x \in [-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$, on a : $|f(x) - (2x + x^2)| \leq |x|^3$.

3. On rappelle que $f(x) = e^x(\sin x + \cos x) - 1$.
   (a) Déterminer le plus grand intervalle I contenant 0 sur lequel f est croissante.
   (b) Déterminer l'image J de l'intervalle I par la fonction f.
   (c) Montrer que f est une bijection de I sur J.

   Soit $g : J \to I$ l'application réciproque de f.
4. (a) Calculer la dérivée de g au point 0.
   (b) On admet que g admet un développement limité à l'ordre 2 en 0 que l'on note :
   $$g(y) = a_1 y + a_2 y^2 + y^2 \epsilon(y)$$
   Calculer a_1, et vérifier que $a_2 = -\frac{1}{8}$.
   (c) Donner l'équation de la tangente au graphe Γ de g au point d'abscisse 0. Préciser la position de cette tangente par rapport à Γ.

Exercice 11. On veut étudier la fonction f définie sur l'intervalle $I =]-\pi/2, \pi]$ par : $f(x) = \ln(1 + \sin x)$

1. (a) Montrer que f est définie,continue et dérivable sur I.
   (b) Etudier $\lim_{x \to -\pi/2} f(x)$.
2. (a) Déterminer le développement limité de f à l'ordre 3 au voisinage de zéro de la fonction f.
   (b) En déduire l'équation de la tangente au graphe au point $(0; 0)$ et la posi- tion du graphe par rapport à la tangente.
3. (a) Montrer sans calcul que f est croissante sur l'intervalle $I_1 =]-\pi/2, \pi/2]$ et décroissante sur l'intervalle $I_2 =]\pi/2, \pi]$. Définir $f(I1)$ et $f(I2)$
   (b) En déduire $f(I)$. f est-elle une bijection de I sur f(I) ?
4. (a) Donner l'expression de f' f'' les dérivées premières et secondes de f et calculer leurs valeurs en $\pi/2$.
   (b) Qu'en déduit-on ? Le résultat était-il prévisible ?
5. (a) Montrer qu'il existe un point c de l'intervalle I_1 tel que $f(c) = -\ln 2$ en énoncant le théorème utilisé.
   (b) c est-il unique ? Pourquoi ? Donner la valeur de c.
6. Donner le tableau de variation de f sur I en regroupant les résultats précédents. On reprécisera les valeurs de f, f' aux points $0, \pi/2; \pi$. Tracer le graphe de f sur I.