Feuille 4 : Équations différentielles linéaires du premier ordre

Exercice 1. Résoudre, sur un intervalle que l'on précisera, les équations différentielles suivantes :

1. $y' = y$,
2. $y' + 2y = 0$,
3. $y' + \dfrac{2y}{x} = 0$,
4. $(1 + x^2)y' = y$.

Exercice 2. Trouver la solution de l'équation différentielle $y' \tan(x) - y = 0$ qui prend la valeur 1 pour $x = \pi/6$.

Exercice 3. Résoudre, sur un intervalle que l'on précisera, les équations différentielles suivantes :

1. $y' = y + 1$,
2. $y' - y = xe^x$,
3. $y' + y = \cos(x) + \sin(x)$
4. $xy' + 2y = x^3$.
5. $(x^2 - 1)y' + xy = 1$,
6. $y' - 2y = x^2$ avec $y(0) = 1$.

Exercice 4. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1. $y' + y = 2e^x$,
2. $(e^x + e^{-x})y' - (e^x - e^{-x})y = e^x$,
3. $y'(1 + x^2) + y = 1 - x - x^2$.

Exercice 5. Soient g et h les fonctions définies par :

$$g(x) = \ln(\ln(x)) \qquad \text{et} \qquad h(x) = \frac{-1}{\ln(x)}.$$

1. Calculer les dérivées des fonctions g et h.
2. Résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation différentielle linéaire du premier ordre suivante :

$$y'x\ln(x) - (x^2\ln(x) + 1)y = \exp(x^2/2).$$

Exercice 6. On pose

$$g(x) = \ln\left(\frac{x-2}{x}\right).$$

1. Donner l'ensemble de définition de g et calculer la dérivée de g sur $]2, +\infty[$.
2. Trouver la solution générale sur l'intervalle $]2, +\infty[$ de l'équations différentielle :

$$y' = \frac{2}{x(x-2)}y + 2(x-2).$$

Exercice 7. On cherche à résoudre l'équation différentielle $y' = 1 + y^2$ sur $I =]-\pi/2, \pi/2[$.

1. En trouver une solution particulière.
2. Soit f une solution de l'équation différentielle. On pose pour $x \in I$, $g(x) = \arctan(f(x))$. Calculer g.
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle sur I.

Exercice 8.

1. Calculer la dérivée de $\phi : x \to -\dfrac{1}{2}\ln(1 + x^2)$.
2. Trouver les solutions de l'équation $(1 + x^2)y' + xy = 0$.
3. Trouver les solutions de l'équation $(1 + x^2)y' + xy = 2x$.

Exercice 9.

1. Calculer la dérivée de la fonction $\phi : x \to \ln(\cos(x))$ avec $x \in]0, \pi/2[$.
2. Trouver la solution sur $]0, \pi/2[$ de l'équation $y' + \tan(x)y = \tan(x)$.

Exercice 10. Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $\sqrt{1 + x^2}y' - y = 1$ sur $\mathbb{R}$,
2. $\sqrt{x^2 - 1}y' + y = 1$ sur $]1, +\infty[$,
3. $(\sin(x))^3 y' = 2\cos(x)y$ sur $]0, \pi[$,
4. $x(1 + \ln^2(x))y' + 2\ln(x)y = 1$ sur $\mathbb{R}_+^*$,
5. $\mathrm{ch}(x)y' + \mathrm{sh}(x)y = \mathrm{sh}^3(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 11. Former une équation différentielle linéaire du premier ordre dont les fonctions de la forme

$$f(x) = \frac{C + x}{1 + x^2},$$

avec $C \in \mathbb{R}$, seraient les solutions.