Feuille 6 : Polynômes

Exercice 1. Résoudre les équations suivantes :

1. $Q^2 = XP^2$, d'inconnues P et Q dans $\mathbb{K}[X]$.
2. $P(P(x)) = P(X)$, d'inconnue $P \in \mathbb{K}[X]$.

Exercice 2. Déterminer les polynômes P vérifiant les relations suivantes :

1. $P(X^2 + 1) = P(X)$.
2. $P(2X + 1) = P(X)$.
3. $P(X^2) = (X^2 + 1)P(X)$.
4. $(1 - X)P'(X) - P(X) = X^n$, où $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3. On considère la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes définie par :

$$P_0(X) = 1, P_1(X) = X \quad \text{et} \quad P_{n+2}(X) = 2XP_{n+1}(X) - P_n(X).$$

1. Préciser P_2, P_3 et P_4.
2. Déterminer le terme de plus haut degré de P_n.
3. Étudier la parité des polynômes P_n.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\theta \in \mathbb{R}$, $P_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$.

Exercice 4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $w = e^{2i\pi/(n+1)}$ une racine (n+1)-ième de l'unité, et soit $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \in \mathbb{C}[X]$.

1. Soit $l \in \mathbb{N}$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} w^{kl}$ en fonction de l.
2. En déduire la valeur de $P(1) + P(w) + \cdots + P(w^n)$.
3. Calculer de même $P(1) + w^{-k}P(w) + \cdots + w^{-nk}P(w^n)$.
4. On pose $M = \displaystyle\sup_{|z|=1} |P(z)|$. Montrer que pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, $|a_k| \leq M$.

Exercice 5. Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de polynômes définie par

$$P_1(X) = X - 2 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, P_{n+1} = P_n^2 - 2.$$

Notons a_n, b_n et c_n les coefficients de 1, X et X^2 dans P_n.

1. Calculer a_1, b_1 et c_1.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
3. Montrer que pour tout $n \geq 2$, $a_n = 2$, $b_n = -4^{n-1}$ et $c_n = 4^{n-2}\dfrac{4^{n-1} - 1}{3}$.

Exercice 6. Montrer que pour tout entier naturel n, il existe un unique polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P_n - P_n' = X^n$. Exprimer les coefficients de P_n à l'aide de nombres factoriels.

Exercice 7. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non nul tel que

$$P(X^2) + P(X)P(X + 1) = 0.$$

1. Montrer que si $a \in \mathbb{C}$ est racine de P, alors a^2 l'est aussi.
2. En déduire que $a = 0$ ou bien que a est racine de l'unité.

Exercice 8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré $n + 1$ possédant $n + 1$ racines réelles distinctes.

1. Montrer que son polynôme dérivé P' possède exactement n racines réelles distinctes.
2. En déduire que les racines du polynôme $P^2 + 1$ sont toutes simples dans $\mathbb{C}$.

Exercice 9. Soit $P = X^4 - 6X^3 + 9X^2 + 9$.

1. Décomposer $X^4 - 6X^3 + 9X^2$ en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.
2. En déduire une décomposition de P dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 10. Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants :

1. $X^4 - 1$,
2. $X^5 - 1$,
3. $(X^2 - X + 1)^2 + 1$.

Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes

1. $X^3 - X^2 + 3X - 3$,
2. $X^4 + X^2 + 1$,
3. $X^8 - 1$.

Exercice 11. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $x^3 - 8x^2 + 23x - 28 = 0$ sachant que la somme de deux des racines est égale à la troisième.