Feuille 7 : Fractions rationnelles et révisions

Exercice 1. On cherche à résoudre sur $]1,+\infty[$ l'équation différentielle suivante :

$$y'(x) = \frac{3}{x^2+x-2}y(x) + \frac{5}{x^2+6x+8}.$$

1. Décomposer dans $\mathbb{R}$ les polynômes X^2+X-2 et X^2+6X+8.
2. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\dfrac{3}{(X-1)(X+2)}$.
3. En déduire la solution générale de l'équation différentielle $y'(x) = \dfrac{3}{x^2+x-2}y(x)$.
4. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\dfrac{5}{(X-1)(X+4)}$.
5. Calculer à l'aide de la méthode de la variation de la constante une solution particulière de l'équation $y'(x) = \dfrac{3}{x^2+x-2}y(x) + \dfrac{5}{x^2+6x+8}$.
6. Donner la solution générale de l'équation $y'(x) = \dfrac{3}{x^2+x-2}y(x) + \dfrac{5}{x^2+6x+8}$.

Exercice 2. Faire les divisions euclidiennes suivantes :

1. X^3-1 par $X-1$ puis X^4+X^2+1 par X^2+X+1 puis X^6-1 par $(X^2-1)(X^2+X+1)$.
2. X^5-1 par $X-1$ puis $X^8+X^6+X^4+X^2+1$ par $X^4+X^3+X^2+1$ puis $X^{10}-1$ par $(X^2-1)(X^4+X^3+X^2+1)$.

Exercice 3 (Relations entre coefficients et racines)**.** Soit $P = X^n + a_1X^{n-1} + a_2X^{n-2} + \cdots + a_n \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme unitaire et soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ ses racines dans $\mathbb{C}$, comptées avec multiplicité. En développant le produit $(X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_n)$, montrer que :

1. $a_1 = -(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n)$ et $a_n = (-1)^n\alpha_1\cdots\alpha_n$.
2. $(*)$ $a_2 = \sum_{i<j} \alpha_i\alpha_j$.
3. En particulier, si $n=2$ exprimer P en fonction de la somme s et du produit p des racines.
4. $(**)$ Pouvez-vous deviner la formule exprimant le coefficient a_k de X^{n-k} en fonction des racines ?

Exercice 4.

1. Former le développement limité à l'ordre 5, au voisiange de 0, des fonctions suivantes :
   (a) $g(x) = \cos(x)$,
   (b) $h(x) = \ln(1+x^4)$.
2. On considère la fonction f définie pour tout nombre réel $x \neq 0$ par

$$f(x) = \frac{\cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2}}{\ln(1+x^4)}.$$

   Montrer que quand x tend vers 0, la fonction f admet une limite l que l'on déterminera.
3. On considère la fonction g définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(x)$ si $x \neq 0$ et $g(0) = l$. Montrer que g est dérivable en 0 et calculer $g'(0)$.

Exercice 5. Soient g et h les fonctions définies sur $[-1,1]$ par

$$g(x) = \arccos(x) \qquad \text{et} \qquad h(x) = \exp(\arccos(x)).$$

1. Calculer la dérivée de g et la dérivée de h sur $]-1,1[$.
2. Résoudre l'équation différentielle $\sqrt{1-x^2}y' + y = 0$ sur $]-1,1[$.
3. Résoudre l'équation différentielle $\sqrt{1-x^2}y' + y = 1$ sur $]-1,1[$.